AUXILIAR Nº5

1. Determinar el volumen del cilindro inscrito en el cono de radio b y altura h.

2. Usando TVM en $[0, x]$, demuestre que si $\alpha \geq 1$, entonces $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$ para $\forall x > 0$.

3. Aplicando TVM a $f(x) = \alpha x - x^{\alpha}$, demostrar que $\forall x \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$, se tiene que

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)$$

y deduzca que $c^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha c + (1-\alpha) b; c, b > 0$

4. [Control 5, 2000]

a) Calcular, usando una descomposición en fracciones parciales,

$$\int \frac{x}{(1+x^2)*(1+x)} * dx$$

b) Calcular, usando el cambio de variable $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$,

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)} * dx$$

c) Calcular, aplicando integración por partes,

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) * dx$$

5. [Control 5, 2003]

Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x - 1} * dx \quad y \quad \int \sin(3x) * \cos(2x) * dx$$

6. [Control 5, 2003]

Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. Sea $I_n = \int e^{-x} f^{(n)}(x) * dx$, donde $f^{(n)}$ denota a la n-ésima derivada de f.

a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x)$

b) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$I_0 = \int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(x) + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

Profesor:	Jaime González
Profesores Auxiliares:	Rodrigo Arce
	Carlos Duarte