

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Extra Examen 2- MA1001 Sección 8

Introducción al Cálculo

Prof. Cátedra: Raul Uribe

Prof. Auxiliares: Carlos Duarte - Sergio Castillo

P1.- Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{x \cdot \sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (e^x - e^2) \cot(x - 2)$$

$$\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}} \\ \left(\frac{2n^2 + 4}{5n^2 + 1} \right)^n$$

P2.- Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a ella en un punto cualquiera (x_0, y_0) de ella

b) Calcule la ecuación de la recta normal a la curva en (x_0, y_0)

c) Pruebe que la recta $y = mx + n$ intersecta a la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ ssi se cumple que $(1 + m^2) R^2 \geq n^2$

d) Use las partes anteriores para encontrar el menor radio del círculo centrado en el origen, que intersecta a la recta normal de la elipse por (x_0, y_0) .

P3.- Sean las siguientes sucesiones

$$X_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Pruebe que ambos límites convergen, y lo hacen al mismo real l . Pruebe además que $2,5 < l < 2,75$

P4.- Considere la función dada por la regla

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Pruebe que si $n \geq 1$ se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

b) Pruebe que si $n > 1$, entonces f es derivable en $x = 0$, pero para $n = 1$ no lo es en ese punto

c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ y encuentre para que valores de n se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

P5.- Considere la función

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

- a) Determine el dominio y los ceros de f
- b) Estudie la paridad y el crecimiento de f
- c) Encuentre el recorrido de f y demuestre que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$
- d) Determine las asíntotas de f . Bosqueje el gráfico de f
- e) Justifique la invertibilidad de f y encuentre su inversa.