Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001-7 Introducción al Cálculo
Profesor: Cristian Reyes. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

Auxiliar 12

P1. Calcule los siguientes límites:

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(\sin h + \cos h)}{h}$
- $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\cdot(x-\dfrac{\pi}{2})$
- $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x(\log(x+1)-\log(x))$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a}, \quad a>0.$

P2.

- Definimos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como sigue: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x=\frac{p}{q} \quad p,q\in\mathbb{Z} \quad \text{y } p,q \text{ son primos relativos}\end{cases}$

  Demuestre que:
  - $\lim\limits_{x\to r} f(x), \quad r\in\mathbb{Q}$ no existe. (análogo a lo probado en clases para $r=\frac{1}{2}$)
  - $\lim\limits_{x\to i} f(x), \quad i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si existe.
- Para la función $f(x)=1+xe^{1/x}$, encuentre:
  - Su asíntota oblicua.
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, y asíntotas verticales, si es que las hay.

    Hint: Para el límite por la derecha haga el cambio de variable $x=\frac{1}{t}$ y use $e^t>t^2 \quad \forall t\in\mathbb{R}^+$

P3.

- Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}=\log a, \quad a>0$, y úselo para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{\log(1+x)}$.
- Considere la función: $f(x)=\begin{cases} a^{\frac{\sin(2x)}{\pi-x}} & \text{si} \quad x<\pi \\ b & \text{si} \quad x=\pi \\ \frac{\log(1-\pi+x)^2}{e^x-e^\pi} & \text{si} \quad x>\pi \end{cases}$
  - Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$
  - Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)$
  - ¿Existen $a,b\in\mathbb{R}$ de modo que f satisfaga: $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=f(\pi)$? Si existen, encuéntrelos.

P4. .

Sea P un punto sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ y denotemos por ϕ el ángulo $\angle AOP$, donde O es el origen y $A=(1,0)$. Supongamos que $\phi \neq 0$ y sea Q el punto $1,\lambda$, con $\lambda \neq \sin\phi$. Por los puntos P y Q se traza una recta que corta el eje de las OX en un punto de abscisa x.

- Muestre que
$$x = 1 - \frac{\lambda(1-\cos\phi)}{\lambda - \sin\phi}.$$
- Suponga que λ se escoge de la forma $\lambda = \dfrac{\sin\phi}{1-\phi^k}$, donde $k=1,2,3$ obteniéndose así una función $x_k(\phi)$. Calcular:
  - $\lim\limits_{\phi\to 0} x_1(\phi)$
  - $\lim\limits_{\phi\to 0} x_2(\phi)$
  - $\lim\limits_{\phi\to 0} x_3(\phi)$

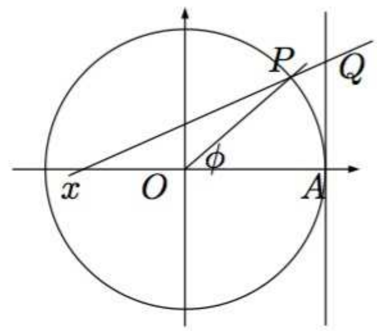

Figura 1: