



Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-7 Introducción al Cálculo

Profesor: Cristian Reyes. Auxiliares: Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

Auxiliar 10

Def 1: Una función $f : \text{dom}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *cóncava* si:

$(\forall \alpha \in (0, 1))(\forall x, y \in \text{dom}(f))$ tal que $(\alpha x + (1 - \alpha)y \in \text{dom}(f))$, entonces:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

P1. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\log_{x^2} a + \log_x b = c \quad (1)$$

Para algunas constantes $a, b > 0, c \in \mathbb{R}$.

P2. Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$s_1 = a > 0, \quad s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a + 1}}$$

- Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq a$
- Pruebe que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y concluya que su límite existe.
- Calcule su límite

P3. Sea $a \in \mathbb{R}$, calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n + a} \right)$$

Y con esto calcule el valor de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + a} \right)^n$$

P4. Estudiar la convergencia de:

$$T_n = \exp \left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \right)$$

- Cuando $s_n \rightarrow a$, para $s_n \leq a$.
- Cuando $s_n \rightarrow -a$, para $s_n \geq -a$.

Hint: Le puede ser útil recordar las desigualdades de e^x .

P5. Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, la función definida como $\phi(x) = -x \log x$.

Consideramos $a_i \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}$, n constantes no negativas tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Demuestre que

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+), \quad \phi \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n a_i \phi(x_i).$$

Hint: Usar inducción en $n \geq 2$, y para el caso base utilizar que ϕ es cóncava.