Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001-7 Introducción al Cálculo
Profesor: Cristian Reyes. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

Auxiliar 8

P1.

1. Considere las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definidas recursivamente por:

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{c} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = a_n + a_{n+1} \end{array}\right. \tag{1}$$

   Queremos estudiar el comportamiento de $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Para ello:

   a) Pruebe, usando inducción, que $a_n \geq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ y utilícelo para demostrar que $\frac{1}{a_n} \to 0$.

   b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} : 2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n$.

   c) Demuestre, usando las partes anteriores, que $\frac{b_n}{a_n} \to \sqrt{2}$.

2. *a)* Si $s_n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1)$, calcule $\lim s_n$.

   b) Demuestre que $\forall b \in \mathbb{R}$ fijo, $\frac{b^n}{n!} \to 0$.

   c) Demuestre que la sucesión definida por $v_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ es convergente.

   d) Se sabe que $u_n = \frac{3n+5}{n-5} \to 3$. Dado $\epsilon = 0{,}01$, se pide determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, u_n \in (3-\epsilon, 3+\epsilon)$.

P2.

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a 1, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq 1$. Usando la definición de convergencia, demuestre que (b_n) converge a 1.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

   a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

   b) Usando la definición de convergencia, demostrar que la sucesión $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ converge a 0.

3. (**Propuesto**) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva.

   a) Demostrar que $\forall M \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \leq M\}$ es finito.

   b) Usando la definición de convergencia, probar que la sucesión $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ converge a 0.

P3.

1. Se define la sucesión (u_n) por

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 = \alpha & \alpha \in (0, \frac{1}{2}) \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) & n \geq 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

   a) Encuentre el máximo de la función $g(x) = 2x - 2x^2$ y a partir de esto demuestre que $\forall n \geq 0 : u_n \in (0, \frac{1}{2})$.

   b) Pruebe que (u_n) es monótona.

   c) Explique por qué (u_n) es convergente. Calcule su límite.

2. Sea $f.\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente, y sea (a_n) una sucesión decreciente y acotada. Demuestre que la sucesión $(f(a_n))$ es convergente.

3. (**Propuesto**) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n \to l$ y $|a_n - b_n| \to 0$. Demuestre usando la definición de convergencia que $b_n \to l$.

P4.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $I_n = [a_n, b_n]$ una familia de intervalos cerrados, con las siguientes condiciones:
   - $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$
   - $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$
   - $\lim b_n - a_n = 0$

   Demuestre que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \in I_n,\ \forall n \in\ \mathbb{N}\}$ es un síngleton (un sólo elemento).
2. (**Propuesto Importante**) Sea $a_0 \in \mathbb{R}$, definimos:
$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \tag{3}$$
   Demuestre que a_n converge a $\sqrt{2}$.
3. Sea (u_n) una sucesión creciente y acotada superiormente.
   a) Demuestre que $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \leq nu_{n+1}$.
   b) Definimos la sucesión (w_n) como $w_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$, pruebe que w_n es creciente.
   c) Demuestre que (w_n) es convergente.