Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001-7 Introducción al Cálculo
Profesor: Cristian Reyes. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

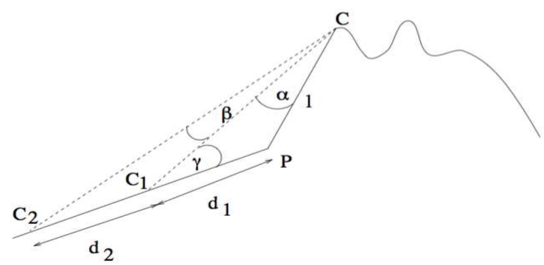
Auxiliar 6

24 de abril de 2011

P1. (**P1 C2 2010-2**)
Considera la función real de variable real definida por la ley $f(x) = \sqrt{x^2-1} - |x|$

i. Determina $\mathrm{Dom}(f)$
ii. ¿Es f par?¿ Es f impar?
iii. Determina $\mathrm{Im}(f)$
iv. ¿Es f inyectiva?
v. Determina los ceros de f.
vi. Determina el mayor[1] $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f_{|A} : A \to \mathrm{Im}(f)$ sea biyectiva .
vii. Calcula la inversa de $f_{|A}$ del ítem anterior.

P2. (**P1 C2 1996**)
Un montañista está en la cima de un cerro y observa una cabaña C_1 con un ángulo α y otra cabaña C_2 con un ángulo $\alpha+\beta$. Su mapa indica que la cabaña C_1 se encuentra a una distancia d_1 del punto P, donde termina la ladera y comienza la falda del cerro, y que las cabañas están separadas por una distancia d_2.



1. Demuestre que la distancia l, desde la cima a P es:

$$l = \frac{d_1(d_1+d_2)\sin(\beta)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2\sin^2(\beta) + d_2^2\sin^2(\alpha+\beta) - 2(d_1+d_2)d_2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta)\cos(\alpha)}}$$

2. Pruebe que cuando $\alpha = \beta$ y $d_1 = d_2$, el ángulo γ (ver figura) es $\frac{\pi}{2}$.

P3. (**Funciones y Trigonometría**)

1. Para la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$ se pide determinar:
   a) Dominio.
   b) Paridad.
   c) Acotamiento.
   d) Demostrar que el conjunto de *ceros* de f está dado por $\left\{ \frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

[1] En este caso mayor significa que si $B \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ con $A \subseteq B$ y $f_{|B} : B \to \mathrm{Im}(f)$ es biyectiva, entonces $A = B$.

2. Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Se definen S_n y T_n como siguen:
   $S_n = \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) + \cdots + \sin(n\alpha)$, y $T_n = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(n\alpha)$.
   a) Definimos $U_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha + \frac{\alpha}{2})$. Demuestre que $U_n = S_n \cos(\frac{\alpha}{2}) + T_n \sin(\frac{\alpha}{2})$.
   b) Pruebe que $\sin(\frac{\alpha}{2}) S_n = \frac{1}{2}\left\{\cos(\frac{\alpha}{2}) - \cos(n\alpha + \frac{\alpha}{2})\right\}$.
   c) Pruebe que $\sin(\frac{\alpha}{2}) T_n = \frac{1}{2}\left\{\sin(n\alpha + \frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2})\right\}$

$\boxed{\text{P4.}}$ (**P2 C1 2010-2**)

1. Si $\cos(x) \neq 0$ y $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ entonces demuestra la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}\tan(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \tan(x) = 0$$

2. Una rueda de 1 m de radio gira en torno a su centro a razón de una vuelta por minuto. Adosada a ella está el extremo de una varilla de 3 m cuyo otro extremo se mueve horizontalmente en el eje X, como muestra la figura. En el instante $t = 0$ el extremo de la varilla adosada en la rueda está en el punto $(1, 0)$. Denotemos por $x(t)$ la posición en el eje X de uno de los extremo de la varilla.
   Determina $x(t)$ explicitamente en términos de t.