**MA1001-7 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Cristian Reyes. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

# Auxiliar 4

11 de abril de 2011

**P1.** (*P2 C1 1996*)

Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y un punto $Q$ sobre su directriz. El trazo $\overline{QO}$ ($O$ origen del sistema) corta a la elipse en un punto $P$. Muestre que la recta que pasa por $Q$ y que es perpendicular a la recta tangente a la elipse en el punto $P$, intersecta al eje $OX$ en el foco de la elipse.

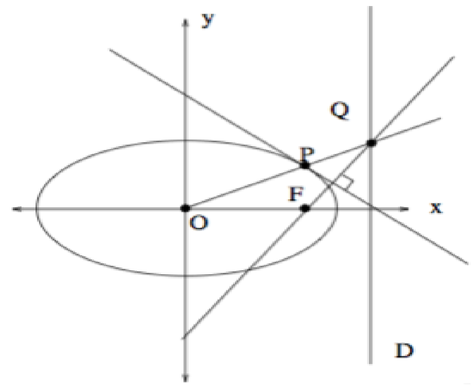


Figura 1:

**P2.** (*P3 C1 2001*)

Sean $P=(1,0)$, $Q=(0,1)$ y $R=(0,0)$ tres puntos en el plano y consideramos $\alpha,\beta,\gamma,\mu$ cuatro números reales conocidos cualesquiera. Determine el lugar geométrico de los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que:

$$\alpha d((x,y),P)^2+\beta d((x,y),Q)^2+\gamma d((x,y),R)^2=\mu \tag{1}$$

**HINT:** Analice cuidadosamente todos los casos posibles, distinguiendo en particular los siguientes:

- $\alpha+\beta+\gamma=0$
- $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

**P3.** (*P1 C1 2002*)

En la elipse de semiejes $a,b>0$ centrada en el origen $O$, el punto $(\alpha,\beta)$, con $0<\alpha<a$, $0<\beta<b$, es un punto arbitrario de la elipse en el primer cuadrante y el punto $\gamma,\delta$, con $-a<\gamma<0$, $-b<\delta<0$, otro punto arbitrario de la elipse en el tercer cuadrante. El objetivo de esta pregunta es demostrar que el segmento que une $P_1$ con $P_2$ contiene al origen (tal como lo muestra la figura). Para ello se pide seguir los siguientes pasos:

i) Si $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$. Demuestre que si $\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}=0$, entonces $0\in\overline{P_1P_2}$.

ii) Determine cuidadosamente las ecuaciones de las cuatro rectas que definen $P_1$ y $P_2$.

iii) Suponiendo conocidos $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, determine las ecuaciones de las coordenadas de $P_1$ y de $P_2$.

iv) Utilizando que $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$ están en la elipse, pruebe que $0\in\overline{P_1P_2}$.

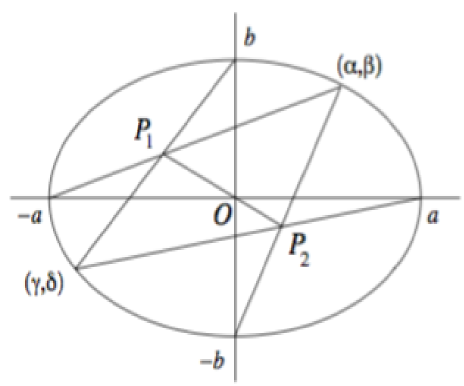


Figura 2: