MA1001-7 Introducción al Cálculo
Profesor: Cristian Reyes. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Felipe Núñez.

Auxiliar 2

28 de marzo de 2011

P1. (Preguntas del control)

(a) Demuestre que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b} \tag{1}$$

(b) Resuelva la siguiente inecuación:

$$|2x - |x+8|| \leq \frac{8}{x-2} \tag{2}$$

P2. (Ejercicios Semana 2) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
(b) $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$
(c) $(x+y)^2 - z \geq 4xy - z$

Si ahora $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, probar las desigualdades:

(d) $(x+y+z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$
(e) Si $x+y+z = 1$, entonces $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geq 8$
(f) SI $xyz = 1$, entonces $x + y + z \geq 3$

P3. (Inecuaciones)

(a) Resuelva $|x+2| + |3x+7| < 2x$
(b) Resolver $\dfrac{5x-15}{x^2+3x-10} \geq 1$
(c) Determinar los valores de k, tal que $\dfrac{x^2+kx-2}{x^2-x+1} < 2$, tenga solución $\forall x \in \mathbb{R}$
(d) Encontrar los valores de m tal que $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m > 3, \forall x \in \mathbb{R}$

P4. (Rectas)
Considerar el triángulo de vértices $A(0,0), B(2b,0), C(c.d)$ y la recta L perpendicular a AB en el punto B. Por M, punto medio de AB, se traza la perpendicular al lado AC que corta el eje OY en el punto R y por el mismo punto M se traza perpendicular al lado BC que corta a la recta L en S. Demostrar que $RS \perp CM$.

$\boxed{\text{Solución [P2] (f)}}$ (Ejercicio Pendiente)

Lo primero se debe probar es que: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^* \quad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

En efecto

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x+y)(2xy - xy) = x^2y + y^2x.\\
x^3 + z^3 &= (x+z)(x^2 - xz + z^2) \geq (x+z)(2xz - xz) = x^2z + z^2x.\\
z^3 + y^3 &= (z+y)(z^2 - zy + y^2) \geq (z+y)(2zy - zy) = z^2y + y^2z.
\end{aligned}$$

Sumamos esas 3 desigualdades, obteniendo:

$$\begin{aligned}
2(z^3 + y^3 + x^3) &\geq z^2x + x^2z + x^2y + y^2x + z^2y + y^2z\\
&= x(z^2 + y^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2)\\
&\geq 2xyz + 2xyz + 2xyz\\
&= 6xyz
\end{aligned}$$

De donde:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Ahora queremos ver que Si $xyz = 1 \Rightarrow (x + y + z) \geq 3$

En efecto, consideramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= ((x+y)+z)^3\\
&= (x+y)^3 + 3(x+y)^2z + 3(x+y)z^2 + z^3\\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3\\
&= (x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz\\
&= (x^3 + y^3 + z^3) + 3(y(x^2 + z^2) + x(y^2 + z^2) + z(x^2 + y^2)) + 6xyz
\end{aligned}$$

Usamos la desigualdad mostrada previamente + la cota usual de la suma los términos cuadráticos, obteniendo:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &\geq (3xyz) + 3(6xyz) + 6xyz\\
&= 27xyz\\
&= 27
\end{aligned}$$

En donde usamos que $xyz = 1$

De donde

$$(x+y+z)^3 \geq 27$$

Aplicando raíz cúbica tenemos:

$$x + y + z \geq 3$$

Que era lo que buscábamos. Como se darán cuenta no era muy obvio el camino a seguir, pero espero se entienda, sino pueden consultarme por el foro o vía mail (fmaldonado@dim.uchile.cl).

Saludos