

Auxiliar Preparación Examen

Auxiliares: Waldo Gálvez, Italo Riarte

11 de Agosto de 2011

P1) Se define la sucesión $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por la recurrencia:

$$P_0 > 0$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{aP_n^2 + b}{aP_n} \right) \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0$$

(i) Pruebe que $u + u^{-1} \geq 2$ para $u > 0$:

$$u + u^{-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u^2 + 1}{u} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + 1 \geq 2u \Leftrightarrow u^2 - 2u + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 \geq 0$$

(ii) Demuestre que P_n es acotado inferiormente por $\sqrt{a^{-1}b}$.

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{aP_n^2 + b}{aP_n} \right) = \frac{1}{2} \left(P_n + \frac{b}{aP_n} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{a^{-1}b} \overbrace{\left(\frac{\sqrt{a}P_n}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}P_n} \right)}^{\geq 2 \text{ (parte a.i)}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^{-1}b} \cdot 2 = \sqrt{a^{-1}b}$$

Así $P_n \geq \sqrt{a^{-1}b} > 0$. Por lo que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado inferiormente por $\sqrt{a^{-1}b}$ (también por 0)

(iii) Demuestre que P_n es convergente.

Para ver la monotonía, dependiendo del caso conviene ver como es $P_{n+1} - P_n$ (signo). También se

puede ver si $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ es mayor o menor que uno y así concluir. Otro camino es usar inducción.

Es natural hacerlo, pues tanto en inducción como en la recurrencia se hace referencia a los términos n y $n+1$. En este caso veremos que pasa con $P_{n+1} - P_n$. Previamente notemos que

$P_n \geq \sqrt{a^{-1}b} \Rightarrow P_n^2 \geq a^{-1}b \Rightarrow aP_n^2 \geq b \Rightarrow 0 \geq b - aP_n^2 \Leftrightarrow b - aP_n^2 \leq 0$. Y además $P_n > 0$. Con esto:

$$P_{n+1} - P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{aP_n^2 + b}{aP_n} - 2P_n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overbrace{b - aP_n^2}^{\leq 0}}{aP_n} \right) \leq 0 \Rightarrow P_{n+1} - P_n \leq 0. \text{ Con lo que } P_n \text{ es decreciente.}$$

$$\text{Otra opción es notar que } P_{n+1} = \frac{P_n}{2} \left(1 + \frac{\overbrace{b}{\leq 1}}{aP_n^2} \right) \leq \frac{P_n}{2} \cdot 2 = P_n. \text{ De cualquier forma } P_n \text{ es decreciente.}$$

Así como P_n es monótona (decreciente) y acotada inferiormente por $\sqrt{a^{-1}b}$, converge.

(iv) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$: como P_n converge existe su límite digamos ℓ , el cual cumple que

$P_n \rightarrow \ell$ y $P_{n+1} \rightarrow \ell$ así al escribir esto en la recurrencia, tenemos que:

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\frac{a\ell^2 + b}{a\ell} \right) \Leftrightarrow 2a\ell^2 = a\ell^2 + b \Leftrightarrow \ell^2 = a^{-1}b \Rightarrow \ell = \sqrt{a^{-1}b} \text{ pues } P_n \geq 0$$

ojo: se descarta $\ell = -\sqrt{a^{-1}b}$ porque $P_n \geq 0$ entonces $\ell \geq 0$.

P2) Sea $v_n = \frac{(2n)!}{e^{2n}(n!)^2}(\pi\varphi - e)^{2n}$ Calcule $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Determine los valores de φ para los cuales $L < 1$.

$$v_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{e^{2(n+1)}((n+1)!)^2}(\pi\varphi - e)^{2(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{e^2 e^{2n}(n+1)^2(n!)^2}(\pi\varphi - e)^{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{e^2(n+1)^2}(\pi\varphi - e)^2 v_n$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{e^2(n+1)^2}(\pi\varphi - e)^2$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{e^2(n+1)^2}(\pi\varphi - e)^2 = \frac{4}{e^2}(\pi\varphi - e)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1/2)}{(n+1)^2} = \frac{4}{e^2}(\pi\varphi - e)^2$$

Imponemos la condición $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$:

$$L < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{e^2}(\pi\varphi - e)^2 < 1 \Leftrightarrow (\pi\varphi - e)^2 < \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow -\frac{e}{2} < \pi\varphi - e < \frac{e}{2} \Leftrightarrow e - \frac{e}{2} < \pi\varphi < e + \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{2} < \pi\varphi < \frac{3e}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{2\pi} < \varphi < \frac{3e}{2\pi} \Rightarrow \varphi \in \left(\frac{e}{2\pi}, \frac{3e}{2\pi} \right).$$

Así para $\varphi \in \left(\frac{e}{2\pi}, \frac{3e}{2\pi} \right)$ se tiene que $L < 1$

P3) Considere la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2}$:

a) Determine dominio, ceros y signos.

Resp: Dominio: Puede verse que los únicos puntos que causan problema para evaluar son $x = 0$ y $x = 2$, por lo que el dominio de la función f será $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Ceros: Dado que la función exponencial nunca vale cero, el único cero posible de la función f será el 1 (ya que sólo dependen del numerador).

Signos: Como la función exponencial es siempre positiva, y $(1-x)^2$ también lo es, los signos de la función f dependen exclusivamente del denominador. Es decir, se tiene que f es negativo en el intervalo $(-\infty, 2)$ y positivo en el intervalo $(2, +\infty)$.

b) Determine asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de existir

Resp: Las posibles asíntotas verticales son el 0 y el 2, por ende hay que analizar los respectivos límites.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

Como basta que uno de los límites diverja, se tiene que 0 efectivamente es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Por ende, 2 también es asíntota vertical.

Para analizar asíntotas horizontales, basta ver los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = e^0 \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} = e^0 \cdot -\infty = -\infty$$

Es decir, no posee asíntotas horizontales. Veamos entonces asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x(x-2)} = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{x-2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2 - x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2e^{\frac{1}{x}} - x^2 + 2x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x)(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{x-2} = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1/x} = 1 \end{aligned}$$

Luego la función f admite como asíntota oblicua hacia $+\infty$ a la recta $y = x + 1$.

A través de un desarrollo análogo al anterior, se obtiene que hacia $-\infty$ la asíntota oblicua será la recta $y = x + 1$ también.

c) Calcule $f'(x)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{Resp: } f'(x) &= \frac{(e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2)'(x-2) - (e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2)(x-2)'}{(x-2)^2} \\ &= \frac{((e^{\frac{1}{x}})'(1-x)^2 + (e^{\frac{1}{x}})((1-x)^2)')(x-2) - (e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2)(x-2)'}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2 - e^{\frac{1}{x}}2(1-x)) - e^{\frac{1}{x}}(1-x)^2}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

P4) Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right)}{\sin^2(x)}. \text{ Recordando que } \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos(x)\right)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right)}{\sin^2(x)} \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)}{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)} \frac{x^2}{x^2}. \text{ Ordenando la situación:}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right)}{\sin^2(x)} \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)}{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)} \frac{x^2}{x^2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)} \frac{(1 - \cos x)}{\frac{x^2}{\sin^2(x)}} \frac{\pi}{2}. \text{ Así quedan solo límites conocidos,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right)}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\overbrace{(1 - \cos x)}^{\rightarrow 1/2}}{\frac{x^2}{\sin^2(x)}}}_{\rightarrow 1} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h}, f \text{ diferenciable en } x_0.$$

Notamos que la expresión se parece a la definición de derivada por lo que hacemos aparecer $f'(x_0)$

$$\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{Multiplicando por 1 se tiene que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \underbrace{\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h}}_{\rightarrow f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}}_{\rightarrow f'(x_0)}$$

La existencia del límite queda justificada por la diferenciabilidad de f en x_0 . Así finalmente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0) + f'(x_0) = 3f'(x_0).$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}. \text{ Recordemos que } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} :$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 - 1 - e^{-x}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{e^{-x} - 1}{-x}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1.$$

Queda propuesto calcular el análogo de las funciones circulares, pero para hiperbólicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$$