Programación Entera y Combinatorial: Bases de IP

IN77O

Universidad de Chile, DII, IN77O

7 de marzo de 2011

Contenidos

Resultados básicos:

Forma estandard:

Decimos que P está en forma estandard si

$$(P): \quad \text{máx}\left\{cx : Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_+\right\} \tag{1}$$

Transformando a forma estandard

- Cualquier problema puede llevarse a forma estandard.
- Igualdades se escriben como dos desigualdades.
- Cotas en variables se pasan a restricciones normales.

Resultados básicos:

Obteniendo Cotas

Consideremos $y \in \mathbb{R}^m_+$, y supongamos que x es factible, entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\cdot} \geq c \Rightarrow \sum y_i A_{i\cdot} x \geq cx \Rightarrow yb \geq cx,$$

de donde

$$\max\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\} \leq \min\{y \in \mathbb{R}^m_+ : A^t y \geq c^t\}.$$

Esto se conoce como dualidad débil.

Resultados básicos:

Definición de Dual:

$$(D): \quad \text{mín}\left\{b^t y : A^t y \geq c^t,\ y \in \mathbb{R}^m_+\right\} \tag{2}$$

EL problema (2) se denomina el dual de (1).

Corolario 1

El dual de un problema dual, es el problema primal.

Corolario 2

Si (P) es no acotado, necesariamente (D) es infactible.

Resultados básicos:

Lema de Farkas

Dado $b, a_i : i = 1, \ldots, m, \in \mathbb{R}^n$, entonces una y solo una de las siguientes propociciones es cierta:

1. b es una combinación positiva de vectores l.i. en $\{a_i\}_{i=1}^m$
2. Existe $c \in \mathbb{R}^n$ un hiperplano que contiene $t-1$ vectores l.i. de $\{a_i\}_{i=1}^m$ tal que $cb < 0$ y $ca_i \geq 0$; donde $t = rank\{a_1, \ldots, a_m, b\}$.

Teorema Dualidad Fuerte

Si (P) o (D) tiene valor óptimo finito, entonces $z_P = z_D$.

Resultados Básicos

- Demostración lema Farkas
  - Podemos asumir que $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \mathbb{R}^n$.
  - Claramente ambas cosas no pueden pasar: si $b = \sum \lambda_i a_i$ con $\lambda \geq 0$, entonces $0 > cb = \sum \lambda_i c a_i \geq 0$, contradicción!
  - Consideremos $\{a_i\}_{i \in D}$ un conjunto l.i. de $\{a_i\}_{i=1}^m$. Seguiremos el siguiente algoritmo:
    1. Resolvemos $b = \sum \lambda_i a_i : i \in D$; si $\lambda \geq 0$ terminamos.
    2. sea h el mínimo índice en D con $\lambda_i < 0$. Sea c el hiperplano que contiene $D \setminus \{a_h\}$ satisfaciendo $ca_h = 1$ (implica $cb = ca_h = \lambda_h < 0$).
    3. Si $ca_i \geq 0$ terminamos.
    4. sea s el mínimo $s \in D$ tal que $ca_s < 0$, y reemplazamos D con $D \setminus \{a_h\} \cap \{a_s\}$.

Resultados Básicos:

- Demostración lema Farkas (cont)
  - Si el algoritmo anterior termina, terminamos!
  - Sea D_k el conjunto D en la iteración k del algoritmo; si el alg. no termina, existe $k < l$ tal que $D_k = D_l$.
  - Sea r el índice máximo de los a_i que *salen* de D_i, y digamos que sale en iteración p.
  - Como $D_k = D_l$ entonces a_r entra en D en iteración q. Entonces $D_p \cap \{a_i\}_{i=r+1}^m = D_q \cap \{a_i\}_{i=r+1}^m$.
  - Consideremos λ^p y c^q, entonces $0 > c^q b = c^q \sum \lambda_i^p a_{j_i} = \sum \lambda_i^p c^q a_{j_i} > 0$.
    - La primera desigualdad viene del alg.
    - La segunda viene de: 1) si $j_i > r \Rightarrow c^q a_{j_i} = 0$. 2) si $j_i = r \Rightarrow \lambda_i^p < 0, c^q a_{j_i} < 0$. 3) si $j_i < r \Rightarrow \lambda_i^p \geq 0, c^q a_{j_i} \geq 0$. $\blacksquare$

Resultados Básicos:

Algunos Comentarios:

- La demostración anterior es algorítmica.
- En el fondo usa SIMPLEX con la regla de *Bland* incorporada.
- Interpretación geométrica de Farkas:

Conos

Definición (Cono)

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice un *cono* (convexo) si

$$x, y \in C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda x + \mu y \in C$$

Definición (Cono polihedral)

Un cono C se dice polihedral si $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$

Definición (Cono generado)

Dado $x_i : i = 1, \ldots, m$, definimos

$cone\{x_1, \ldots, x_m\} = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \lambda \geq 0\}$.

Conos

Corolario:

Un cono es generado finitamente si y solo si es polihedral.

Demostración:

- $(\Rightarrow)$ Sea $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, probaremos que $cone\{x_i\}_{i=1}^m$ es polihedral.
  - Asumimos $\langle x_i : i = 1, \ldots, m\rangle = \mathbb{R}^n$.
  - Consideremos todos los semi-espacios $H = \{x : cx \leq 0\}$ tal que $cx_i \leq 0,\ \forall i = 1, \ldots, m$ y que se satisface a igualdad por $n-1$ vectores l.i. de $\{x_i\}_{i=1}^m$.
  - Nótese que existe una cantidad finita de tales semi-espacios.
  - Por el lema de Farkas $cone\{x_i\}_{i=1}^m = \{x : Cx \leq 0\}$. ■

Conos

Demostración (cont.):

$(\Leftarrow)$ Sea $C = \{x : a_i x \leq 0, i \in I\}$.

- Demostraremos que si $cone\{a_i\}_{i\in I} = \{x : b_j^t x \leq 0, j \in J\}$ entonces $C = cone\{b_j\}_{i\in J}$.
- Note que $b_j^t a_i \leq 0 \forall i \in I, j \in J$ ($\Rightarrow cone\{b_j\}_{j\in J} \subseteq C$).
- Supongamos que $\exists y \in C \setminus cone\{b_j\}_{j\in J}$.
- Por Farkas, $\exists w : w^t b_j \leq 0 \forall j \in J,\ w^t y > 0$.
- Por definición, $w \in cone\{a_i\}_{i\in I}$.
- Luego $\forall x \in C,\ wx \leq 0$, pero $y \in C \rightarrow\leftarrow$. $\blacksquare$

Polihedros y Politopos

Polihedro

Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polihedro si $P = \{x : Ax \leq b\}$.

Politopo

Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un politopo si existe $\{x_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $P = \mathrm{conv.hull}\{x_i : i = 1, \ldots, m\}$

- Es lógico pensar que politopos y polihedros estan relacionados.
- Presentaremos dos resultados que hacen mas precisa esta relación.
  - El teorema de descompoción.
  - El teorema de bases finitas.

Politopos y Polihedros

Teorema de descompocición

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polihedro si y solo si $P = Q + C$ para algún politopo Q y un cono polihedral C.

Demostración

- $(\Rightarrow)$
  - Sea $P = \{Ax \leq b\}$, y consideremos el cono $P' = \{(x, \lambda) : \lambda \geq 0, Ax - \lambda b \leq 0\}$.
  - Entonces $P' = \mathrm{cone}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ \lambda_m \end{pmatrix}\right\}$.
  - Podemos asumir que $\lambda_i = 0\, \forall i = 1, \ldots, q$ y $\lambda_i = 1\, \forall i = q + 1, \ldots, m$, entonces
  - $C = \mathrm{cone}\{x_i : i = 1, \ldots, q\}$ y $Q = \mathrm{conv.hull}\{x_i : i = q + 1, \ldots, m\}$. ■

Politopos y Polihedros

Demostración (cont.)

- $(\Leftarrow)$.
  - Sea $P = Q + C$ con $Q = \text{conv.hull}\{x_1, \ldots, x_m\}$ y $C = \text{cone}\{y_1, \ldots, y_t\}$.
  - Entonces $x_o \in P$ ssi $(x_o, 1) \in P' = \text{cone}\{(x_1, 0), \ldots, (x_m, 1), (y_1, 0), \ldots, (y_t, 0)\}$.
  - Por corolario anterior, $P' = \{(x, \lambda) : Ax + \lambda b \leq 0\}$ para alguna matriz A y vector b.
  - Asi, $x_o \in P$ si $Ax_o \leq -b$, por lo que P es un polihedro.

Conjunto Generador

Se dice que P es generado por los puntos $\{x_i\}_{i=1}^m$ y las direcciones $\{y_i\}_{i=1}^t$ si
$P = \text{conv.hull}\{x_i : i = 1, \ldots, m\} + \text{cone}\{y_i, \ldots, y_t\}$.

Politopos y Polihedros

- Una consecuencia es que P es un polihedro si y solo si es generado finitamente.
- Otra consecuencia es que P es un politopo si y solo si es un polihedro acotado.

Equivalentes de Farkas

Aqui presentamos algunas formas equivalentes del lema de farkas.

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Entonces existe $x \geq 0$ con $Ax = b$ si y solo si $yb \geq 0 \,\forall y : yA \geq 0$.
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Entonces existe x tal que $Ax \leq b$ si y solo si $yb \geq 0 \,\forall y : yA = 0, y \geq 0$.
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Entonces existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$ si y solo si $yb \geq 0 \,\forall y : y \geq 0, yA \geq 0$.

Dualidad Fuerte

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, entonces $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ Siempre y cuando ambos conjuntos sean no vacios.

Demostración

- basta demostrar que $\exists x, y$ factibles tal que $yb \leq cx$.
- i.e. basta encontrar x, y tal que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c & b^t \\ 0 & A^t \\ 0 & -A^t \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y^t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c^t \\ -c^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dualidad Fuerte

Demostración (cont.)

- Usando farkas, lo anterior ocurre si y solo si $\forall y' = (u, v, w, \lambda, \theta) \geq 0, y'A' \geq 0$ se tiene que $y'b' \geq 0$.
- Re-escribiendo: pdq $\forall (u, v, w, \lambda) \geq 0$, $uA - vc = 0$, $vb^t + wA^t - \lambda A^t \geq 0$ se tiene que $ub + wc^t - \lambda c^t \geq 0$.
- Caso $v > 0$: $ub = v^{-1} v b^t u^t \geq v^{-1}(\lambda - w) A^t u^t = v^{-1}(\lambda - w) v c^t = (\lambda - w) c^t$.
- Case $v = 0$: sean x_o, y_o tal que $Ax_o \leq b$, $y_o \geq 0, y_o A = c$. Entonces $ub \geq uAx_o = 0 \geq (\lambda - w) A^t y_o^t = (\lambda - w) c^t$. ■

Formulaciones Equivalentes

1. $\max\{cx : Ax \leq b\}$.
2. $\max\{cx : x \geq 0, Ax \leq b\}$.
3. $\max\{cx : x \geq 0, Ax = b\}$.
4. $\min\{cx : Ax \geq b\}$.
5. $\min\{cx : x \geq 0, Ax \geq b\}$.
6. $\min\{cx : x \geq 0, Ax = b\}$.

Nótese que para estas formulaciones equivalentes, podemos encontrar una forma apropiada del teorema de dualidad fuerte.

Holgura Complementaria

- Consideramos $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{y^t b : A^t y \geq c^t, y \geq 0\}$.
- Dados x_o, y_o factibles en el primal y el dual respectivamente, es equivalente que:
    1. x_o y y_o son optimos.
    2. $cx_0 = y_0^t b$.
    3. $y_o^t(Ax_o - b) = 0$ y $(c - y_o^t A)x_o = 0$.

Equaciones implicitas y restrricciones redundantes

- Consideramos un sistema $P = \{x : Ax \leq b\} \neq \emptyset$:
  - Una restricción $ax \leq \beta$ de $Ax \leq b$ es una igualdad implicita si $ax = \beta \forall\, x \in P$.
  - Definimos $A^{=}x \leq b^{=}$ las igualdades implicitas de $Ax \leq b$.
  - Definimos $A^{+}x \leq b^{+}$ el resto de $Ax \leq b$.
  - Notemos que $\exists x \in P$ tal que $A^{=}x = b^{=}$ y $A^{+}x < b^{+}$.
  - Una restricción es redundante si es implicada por otras restricciones del sistema.
  - Restricciones redundantes pueden ser eliminadas del sistema de restricciones.
  - Un sistema es no-redundante si no contiene restricciones redundantes.

Otras definiciones

Cono Característico

$\text{char.cone}(P) = \{y : x + y \in P \forall x \in P\} = \{y : Ay \leq 0\}$.

- Propiedades del cono caracteristico:
  - $y \in \text{char.cone}(P)$ ssi $\exists x \in P : \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, x + \lambda y \in P$.
  - $P + \text{char.cone}(P) = P$.
  - P es acotado ssi $\text{char.cone}(P) = \{0\}$.
  - Si $P = Q + C$ donde C cono polihedral, y Q politopo, entonces $C = \text{char.cone}(P)$.
- Vectores no nulos en $\text{char.cone}(P)$ son llamados direcciones infinitas de P.

Otras definiciones

Espacio Lineal

$$\text{lin.space}(P) = \{y : x \pm y \in P \forall x \in P\} = \{y : Ay = 0\}.$$

- $\text{lin.space}(P) = \text{char.cone}(P) \cap -\text{char.cone}(P)$.
- Si $\dim(\text{lin.space}(P)) = 0$, P se dice punteado.
- Para $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que $\dim(P) := n - \text{rank}(A^=)$.

Dimensión de un Polihedro

Definición 1:

Dado $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, $\dim(P)$ es la dimensión del espacio lineal afin más pequeño que lo contiene.

- ¿Cuál es el espacio lineal afin más pequeño que contiene P?
  - Definamos $\text{aff.hull}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y, z \in P, \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y + (1-\lambda)z\}$.
  - Usando la notación anterior, es fácil demostrar que $\text{aff.hull}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=\}$.
  - De donde podemos simplificar a $\text{aff.hull}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^= x \leq b^=\}$.
  - Con esto nos queda $\dim(P) = n - \dim(\{A^= x = 0\}^\perp) = n - \text{rank}(A^=)$.

Dimensión de un Polihedro

- La definición anterior es intuitiva, pero es difícil de calcular.
- ¿Cómo calculamos la dimensión de un polihedro cuando no conocemos su descripción como sistema de desigualdades? (Por ejemplo en el caso del TSP)

Conjunto afin independiente (a.i.):

$S \subset \mathbb{R}^n$ se dice afin independiente si

$S' := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in S \right\}$ es l.i. en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dimensión de un Polihedro

Definición 2:

$$\dim(P) = \max_{S\subseteq P}\{|S| - 1 : S \text{ es a.i.}\}.$$

- Ejemplo
  - Consideremos $GTSP(G)$, donde $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido y conexo, y
    $$GTSP(G) := \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^E : \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2\, \forall \emptyset \neq S \subsetneq V \right\}.$$
  - Sea T un arbol en G, y consideremos x_T su vector indicatriz, entonces $2x_T \in GTSP(G)$.
  - Además, $2x_T + e_e \in GTSP(G) \forall e \in E$.
  - Nóte que $S := \{2x_T, 2x_T + e_e : e \in E\}$ es a.i., por lo que $\dim(GTSP(G)) = |E|$.

Caras y Facetas

- Consideremos $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$ y $P = \{x : Ax \leq b\} \neq \emptyset$.
- Sea $\delta = \max\{cx : x \in P\}$, entonces $H = \{x : cx = \delta\}$ es un plano soportante de P.
- $F \subsetneq P$ es una cara de P si $F = P \cap H$ para algún plano soportante H de P.
- Esto implica que F es una cara de P ssi $\exists 0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ tal que F es el conjunto de soluciones óptimas para $\max\{cx : x \in P\}$.

Lema

F es una cara de P ssi $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ para A', b' sub-sistema de A, b.

Caras y Facetas

Demostración

- $(\Rightarrow)$ Sea $F = \{x \in P : cx = \delta\}$.
  - Sea y_o en el dual tal que $y_o b = \delta = \text{mín}\{yb : y \geq 0 yA = c\}$.
  - Definimos A', b' restricciones asociadas a $(y_o)_i > 0$.
  - Entonces $cx = \delta$, $Ax \leq b$ ssi $y_o Ax = y_o b$ ssi $A'x = b'$.
- $(\Leftarrow)$ Sea $F = \{x \in P : A'x = b'\} \neq \emptyset$.
  - basta considerar $c = \sum A'_{i\cdot}$.

- P tiene un numero finito de caras.
- Cada cara de P es un polihedro.
- Si F es una cara de P, y $F' \subseteq F$, F' es una cara de F ssi F' es una cara de P.

Facetas

Definición

Una faceta de P es una cara maximal (con respecto a inclusion) de P.

- Consideremos $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ y supongamos que A^+ es no redundante.
  - Sean $\{H_i : i \in F\}$ los planos soportantes de todas las facetas de P, entonces:
  - Para cada H_i existe $a_j x \leq b_j$ en $A^+ x \leq b^+$ tal que $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=, a_j x = b_j\}$.
  - $\dim(H_i) = \dim(P) - 1$.
  - Esto implica que si escogemos $(A^+)_{i\cdot} \in \{A^=\}^\perp$ entonces el conjunto de restricciones no redundante esta únicamente definida (salvo mult. por escalar).

Bibliografía I