INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN5602 – Marketing II

Modelos de Comportamiento: Estimación

1

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejemplo

Proyección de Retención de Clientes

2

Motivación

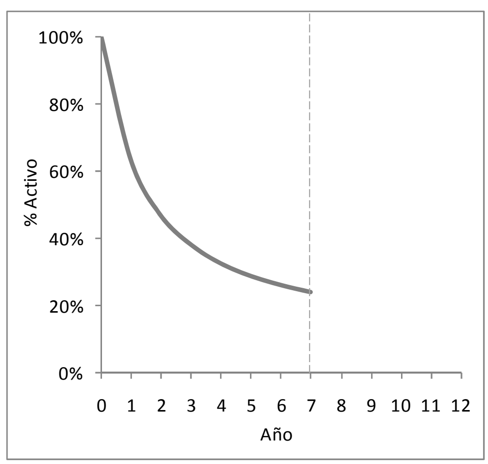
Consideremos un cohorte de 1000 clientes capturados en el mismo periodo.

Año	#Clientes	%Activo
0	1000	100%
1	631	63%
2	468	47%
3	382	38%
4	326	33%
5	289	29%
6	262	26%
7	241	24%

Data Mining Techniques (Berry and Linoff, 2004)

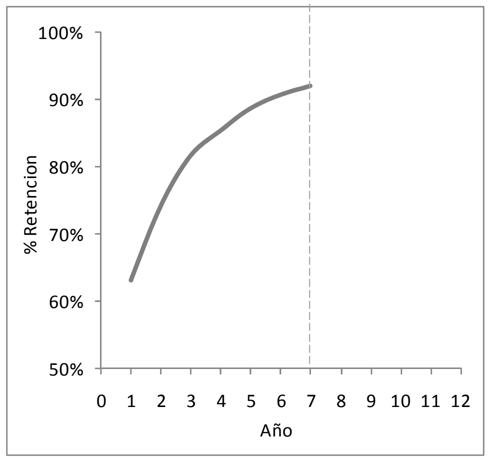
Objetivo de la Modelación

Queremos desarrollar un modelos que nos permita proyectar las *curvas de sobrevivencia* (y por tanto las *tasas de retención*) en los próximos 5 años (es decir hasta el periodo 12).



Tasas de Retención

La tasa de retención para el periodo t se define como la proporción de clientes que renueva su contrato al final del periodo t-1 y que renueva su contrato al final del periodo t



Punto de partida natural/típico

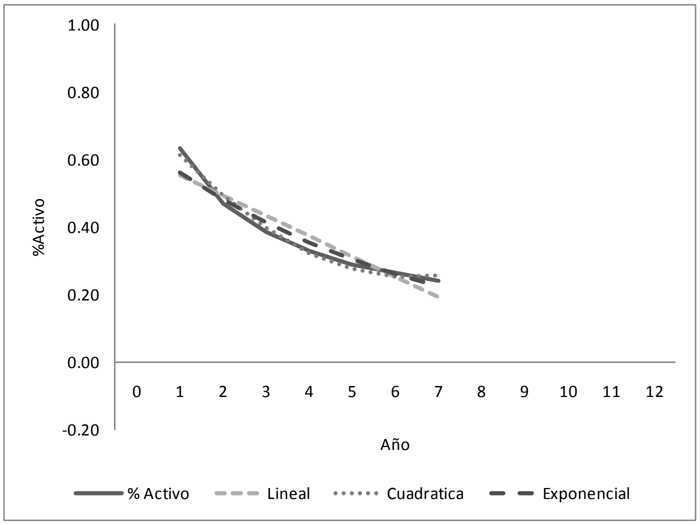
- Modelo de regresión usando el tiempo como variable explicativa.
- Sea *y* la proporción de clientes que siguen activos en el periodo *t*.

$$y = 0.61 - 0.06t$$ lineal

$$y = 0.76 - 0.16t + 0.12t^2$$ cuadrática

$$\ln(y) = -0.43 - 0.16t$$ exponencial

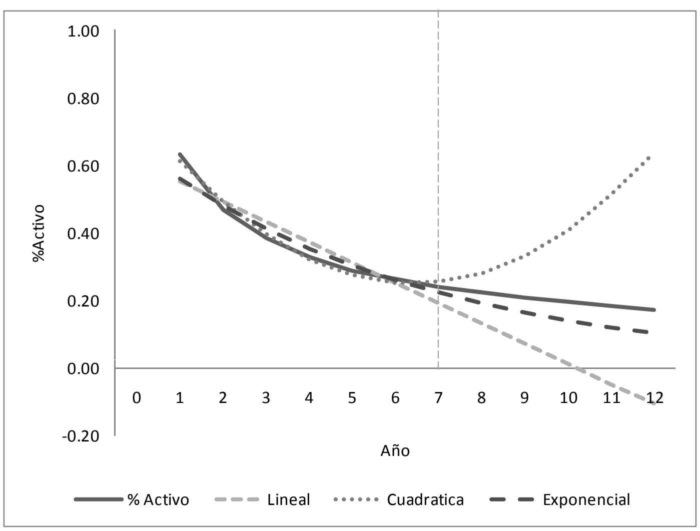
Ajuste del Modelo



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

7

Proyección



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

8

Mejorando el modelo

- Premisa:
  - describir un proceso (historia) que pueda generar los datos que observamos.
  - El proceso dependerá de uno o mas parámetros que debemos estimar.
- Un modelo sencillo:
  - Al final de cada periodo, cada cliente abandona la compañía con una probabilidad θ (y renueva con probabilidad $1-\theta$).
  - Partiremos asumiendo que todos los clientes tienen la misma probabilidad θ.

Formalmente

- Sea T la variable la duración de la relación del cliente con la compañía.
- De acuerdo a nuestra descripción, la variable aleatoria T sigue una distribución geométrica desplazada (sG) con parámetro θ.

$$\Pr\left(T = t \middle| \theta\right) = \theta\left(1-\theta\right)^{t-1} \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Pr\left(T > t \middle| \theta\right) = \left(1-\theta\right)^{t} \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

Estimacion del Modelo

- Muestra de M clientes.
- $\mathbf{T}_i$ =1,2,3,… : ano de abandono del cliente i.
- Funcion de verosimilitud:

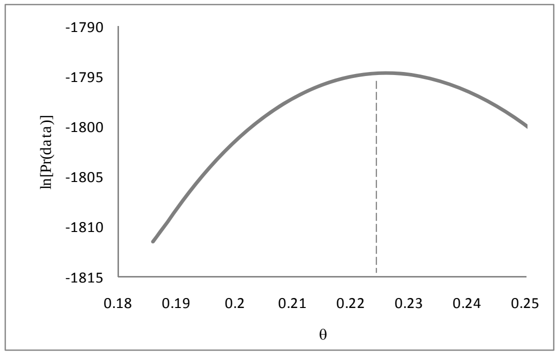
Función de Verosimilitud

La probabilidad de observar un determinado numero de abandonos cada año como función de θ se deriva directamente.

La función de verosimilitud resulta de considerar la probabilidad conjunta de todos los abandonos por año.

Año	#Clientes	#Abandonos	Pr
0	1000		
1	631	369	θ^{369}
2	468	163	$((1-\theta)^1\theta)^{163}$
3	382	86	$((1-\theta)^2\theta)^{86}$
4	326	56	$((1-\theta)^3\theta)^{56}$
5	289	37	$((1-\theta)^4\theta)^{37}$
6	262	27	$((1-\theta)^5\theta)^{27}$
7	241	21	$((1-\theta)^6\theta)^{21}$
>7			$((1-\theta)^7)^{241}$

Estimación del Parámetro θ



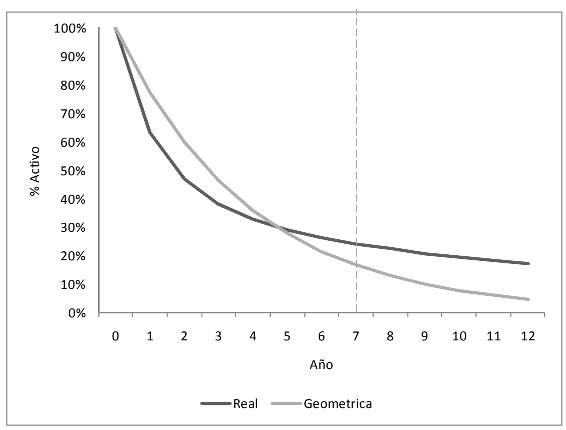
θ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
Ln[Pr(data)]	-1801.51	-1840.81	-2023.10	-2327.59	-2769.16

$$\theta^* = \arg\max\left\{\ln\left[\Pr\left(\text{data}\,|\theta\right)\right]\right\}$$

Problema de programación continua (convexa)

Resultados: Modelo Homogéneo

El máximo de la log-verosimilitud es LL=–1794.62 que ocurre θ=0.226



Heterogeneidad

- Un concepto fundamental en marketing es que los clientes son diferentes.
- Necesitamos un modelo de heterogeneidad:
  - Discreta (grupos de clientes) o Continua (cada cliente es diferente)
- Modelo mas sencillo: Hay solo dos tipos de clientes con distintas probabilidades de abandonar.

Segment	Pr. Abandonar
1	θ_1
2	θ_2

Modelo de Mezcla Finita

- Calculamos la distribución de la duración usando la ley de probabilidades totales (Pr(x)=Pr(x|a)Pr(a)+Pr(x|b)Pr(b))
- Formalmente:

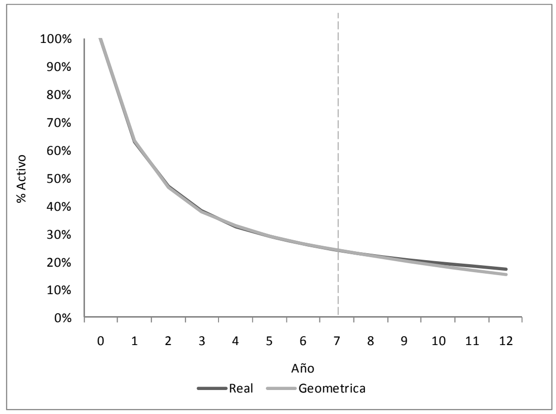
$$\Pr\left(T=t \mid \theta_1,\theta_2,\pi\right)=\theta_1\left(1-\theta_1\right)^{t-1}\pi+\theta_2\left(1-\theta_2\right)^{t-1}\left(1-\pi\right) \qquad t=1,2,3,\ldots$$

$$\Pr\left(T>t \mid \theta_1,\theta_2,\pi\right)=\left(1-\theta_1\right)^{t}\pi+\left(1-\theta_2\right)^{t}\left(1-\pi\right) \qquad t=1,2,3,\ldots$$

- A este modelo le llamamos una "mezcla finita" de distribuciones geométricas.

Resultados: sG - 2 segmentos

El máximo de la log-verosimilitud es $LL = -1680.05$ que ocurre en $\theta_1 = 0.083$, $\theta_2 = 0.586$ y $\pi = 0.439$



Heterogeneidad Discreta y Continua

- En el modelo de heterogeneidad **discreta** asumimos que la probabilidad de abandono θ sigue una distribución discreta (e.g. bernoulli(π))

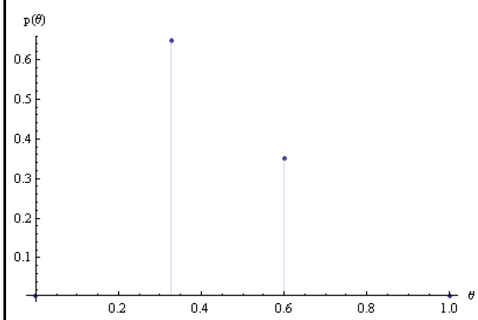
$$p(\theta = \theta_1 | \pi) = \pi \qquad \pi \in [0,1], \theta \in (0,1)$$
$$p(\theta = \theta_2 | \pi) = 1 - \pi$$

- En el modelo de heterogeneidad **continua** asumimos que la probabilidad de abandono θ sigue una distribución continua (e.g. beta(α,β))

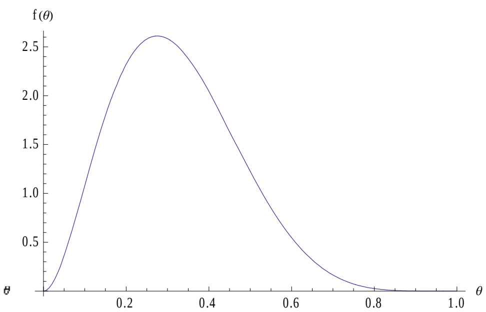
$$f(\theta | \alpha, \beta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \qquad \alpha > 0, \beta > 0, \theta \in (0,1)$$

Heterogeneidad Discreta y Continua

Distribución Discreta



Distribución Continua



- Con suficientes segmentos podemos aproximar una distribución continua.

Modelo de Mezcla Continua

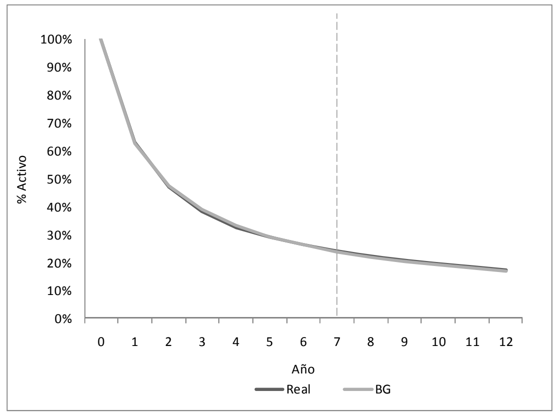
- Calculamos la distribución de la duración puede calcularse usando la siguiente recursión:

$$\Pr\left(T = t \middle| \alpha, \beta\right) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} & t = 1 \\ \dfrac{\beta+t-2}{\alpha+\beta+t-1}\Pr\left(T = t-1 \middle| \alpha, \beta\right) & t = 2,3,\ldots \end{cases}$$

- Este modelo le llamamos una "mezcla continua" de distribuciones geométricas.
- Como usamos una distribución Beta para la heterogeneidad, nombramos este modelo Beta-Geométrica desplazada (sBG).

Resultados: beta-geométrica

El máximo de la log-verosimilitud es LL=−1680.27 que ocurre en α=0.7041, y β=1.1820



Conceptos y Herramientas Introducidas

- Modelos probabilisticos.
- Estimador Maximo Verosimil.
- Heterogeneidad.
  - Modelos de mezcla discreta (sG-2seg)
  - Modelos de mezcla continua. (sBG)

IN5602 – Marketing II

Modelos de Comportamiento: Estimación y Heterogeneidad