

IN58B – Ingeniería en Marketing

Modelos de Conteo

Marcelo Olivares
Semestre Otoño 2011

1

Motivación

- Clases de modelos:
 - Modelos de Duracion.
 - Modelos de Conteo.
 - Modelos de Eleccion.
- En un modelo de conteo queremos estimar cuantas veces los consumidores incurriran en un comportamiento determinado en un periodo de tiempo.
 - Cuantas veces visitaran la tienda.
 - Cuantas veces llamara al call center.
 - Cuantas veces usara el producto, etc.

2

Modelo de Conteo

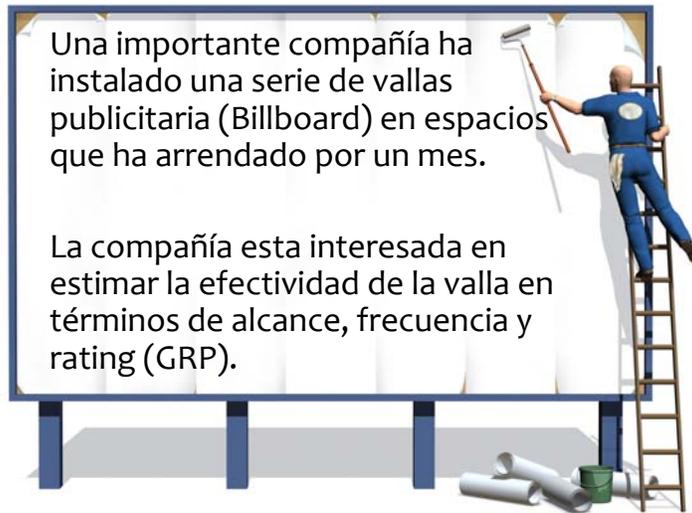
Exposición Publicitaria

3

El problema de Exposición Publicitaria

Una importante compañía ha instalado una serie de vallas publicitaria (Billboard) en espacios que ha arrendado por un mes.

La compañía esta interesada en estimar la efectividad de la valla en términos de alcance, frecuencia y rating (GRP).



4

El problema de Exposición Publicitaria

- Para estimar el impacto se ha encuestado durante una semana a una muestra de 250 clientes quienes reportan sus viajes diarios en un mapa.
- De las respuestas, se cuenta la frecuencia total de veces que los clientes enfrentan alguna valla con la campana publicitaria.
- Preguntas :
 - Modelar la exposición en una semana.
 - Proveer estadísticos descriptivos de la distribución de la exposición para un periodo mas largo (por ejemplo el mes que dura la campaña).

Descripción de los Datos

# Exposiciones	# Personas	# Exposiciones	# Hogares
0	48	12	5
1	37	13	3
2	30	14	3
3	24	15	2
4	20	16	2
5	16	17	2
6	13	18	1
7	11	19	1
8	9	20	2
9	7	21	1
10	6	22	1
11	5	23	1

Medidas de efectividad

- La efectividad de la campaña se evalúa en termino de tres métricas:
 - **Alcance:** La proporción de la población expuesta al mensaje de la valla publicitaria al menos una vez durante el periodo.
 - **Frecuencia promedio:** El numero promedio de exposiciones en el periodo entre aquellos que han visto la valla.
 - **Puntos de rating brutos (GRPs):** El numero promedio de exposiciones por cada 100 personas.

Desarrollando un modelo

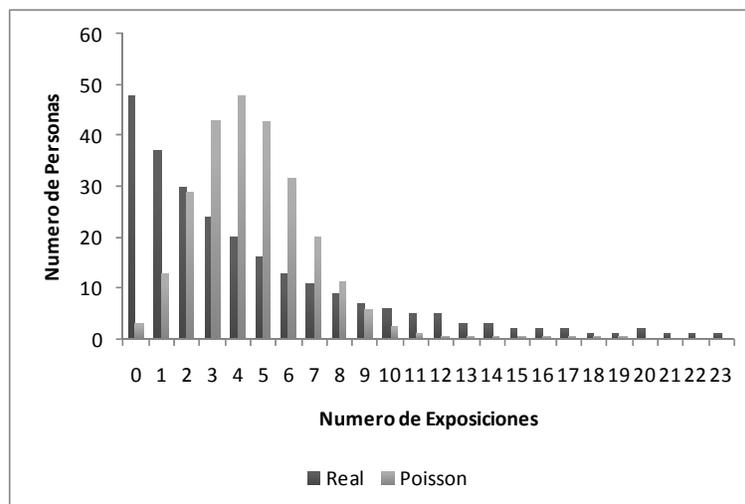
- Comenzar la descripción de comportamiento a nivel individual y luego agregar.
 - Cual es comportamiento a nivel individual que nos interesa?
 - Numero de veces que cada individuo ve la valla publicitaria.
- Que factores son los que determinan si un cliente ve o no la valla publicitaria?
 - Múltiples factores, alta aleatoriedad
 - Alternativas de viaje no son observables.
 - Consideramos la "tasa de exposición" como variable aleatoria.

Modelo de Nivel Individual

- Sea X el numero de exposiciones a la valla publicitaria.
 - X discreta.
 - X No negativa.
- Asumiremos que el numero de exposiciones se distribuye Poisson con tasa de exposición λ (asumimos $t=1$ semana).

$$\Pr(X = x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Resultados: Poisson



Estimación: Método de los momentos

- Supongan que solo observan la media y la varianza del numero de exposiciones.
- Para la NBD, la media y varianza pueden ser calculadas analiticamente:
 - Media: $m = r/\alpha$
 - Varianza: $v = r/\alpha + r/\alpha^2$
- Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas!

Poisson para horizonte no unitario

- Hemos derivado la NBD para el caso $t=1$ (e.g. 1 semana). La extensión para un horizonte arbitrario es directa.
- Sea $X(t)$ el numero de exposiciones que ocurren en un periodo de largo t unidades de tiempo.
- La distribución of exposiciones al nivel individual para una unidad de tiempo es Poisson con tasa λ . La distribución de exposiciones en t unidades de tiempo es Poisson con tasa λt .

$$\Pr(X = x|\lambda) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Heterogeneidad

- Hemos asumido que todos los clientes ven las vallas publicitarias a la misma tasa.
- Para incluir heterogeneidad en λ asumiremos que dicha tasa esta distribuida Gamma(α, r)

$$g(\lambda|\alpha, r) = \frac{\alpha^r \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}}{\Gamma(r)}$$

Modelo Gamma-Poisson (or NBD)

- La distribución de las exposiciones (población)

$$\begin{aligned} \Pr(X = x|r, \alpha) &= \int_0^{\infty} \Pr(X = x|\lambda)g(\lambda|r, \alpha)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \frac{\alpha^r \lambda^{r-1} e^{-\lambda\alpha}}{\Gamma(r)} d\lambda \\ &= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)x!} \int_0^{\infty} \lambda^{r+x-1} e^{-\lambda(\alpha+1)} d\lambda \\ &= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)x!} \frac{\Gamma(r+x)}{(\alpha+1)^{r+x}} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha+1)^{r+x} \lambda^{r+x-1} e^{-\lambda(\alpha+1)}}{\Gamma(r+x)} d\lambda \\ &= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)x!} \frac{\Gamma(r+x)}{(\alpha+1)^{r+x}} \int_0^{\infty} g(\lambda|r+x, \alpha+1) d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^r \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^x \end{aligned}$$

Este modelo Gamma-Poisson
también se llama Binomial
Negativa (NBD)

Formula Recursiva

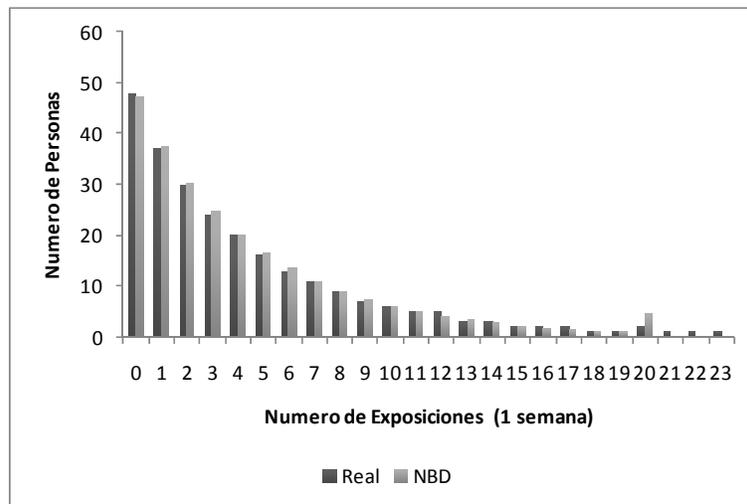
- Para la implementacion de la NBD es util explotar la siguiente recursion

$$\frac{\Pr(X = x)}{\Pr(X = x-1)} = \frac{r+x-1}{x(\alpha+1)}$$

...lo cual implica

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^r & x=0 \\ \frac{r+x-1}{x(\alpha+1)} \Pr(X = x-1) & x \geq 1 \end{cases}$$

Resultados: NBD



Poisson para horizonte no unitario

- Hemos derivado la NBD para el caso $t=1$ (e.g. 1 semana). La extensión para un horizonte arbitrario es directa.
- Sea $X(t)$ el número de exposiciones que ocurren en un periodo de largo t unidades de tiempo.
- La distribución de exposiciones al nivel individual para una unidad de tiempo es Poisson con tasa λ . La distribución de exposiciones en t unidades de tiempo es Poisson con tasa λt .

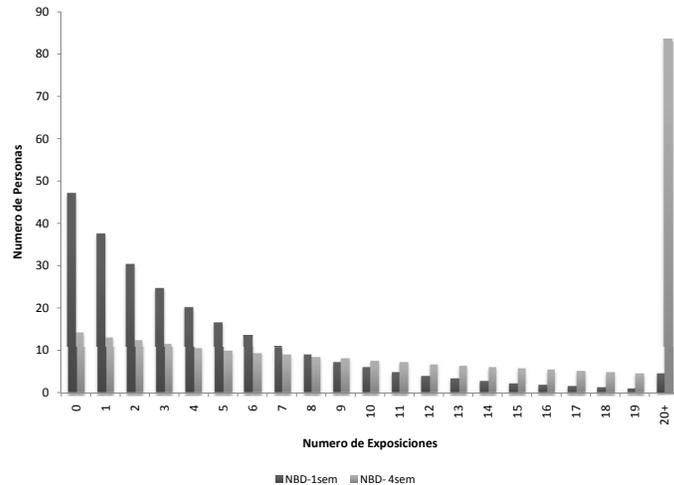
$$\Pr(X = x | \lambda) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

NBD para horizonte no unitario

- La derivación de la distribución (a nivel de la población) para la NBD para horizonte no unitario es análoga a la del caso de horizonte unitario.

$$\begin{aligned} \Pr(X = x) &= \int_0^{\infty} \Pr(X(t) = x | \lambda) g(\lambda | r, \alpha) d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t} \right)^r \left(\frac{t}{\alpha+t} \right)^x \end{aligned}$$

Resultados: NBD – 4 semanas



Efectividad de la Campaña

- La compañía está interesada en efectividad en términos de alcance, frecuencia y rating.
 - Alcance: $1 - \Pr(X(t)=0)$
 - Frecuencia: $E[X(t)] / (1 - \Pr(X(t)=0))$
 - Rating: $100 E[X(t)]$
- Para $t=4$: $\Pr(X(t)=0)=0.056$ y $E[X(t)]=17.82$. Entonces:
 - Alcance: $1 - 0.056 = 94.4\%$
 - Frecuencia: $17.82 / (1 - 0.056) = 18.9$
 - Rating: $100 (17.82) = 1782$

Conceptos y Herramientas Introducidas

- Modelos de conteo
 - Poisson
 - Gamma-Poisson o Binomial Negativa (NBD)
- Tipos de estimacion
 - Maxima verosimilitud
 - Metodo de los momentos.
- Medidas de efectividad:
 - Alcance, frecuencia y rating.