IN47B/IN4704: Ing. de Operaciones/Gestión de Op. II
Profs: C. Bravo, M. Olivares, F. Ordoñez
Auxs: A. Echeverría, F. Lagos, F. Solari

Pauta Auxiliar 5

Miércoles 25 de Mayo de 2011

Problema Determinista

Variables de Decisión

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{hectáreas destinadas a trigo} \\
x_2 &= \text{hectáreas destinadas a maíz} \\
x_3 &= \text{hectáreas destinadas a remolacha} \\
w_1 &= \text{tons de trigo vendido} \\
y_1 &= \text{tons de trigo comprado} \\
w_2 &= \text{tons de maíz vendido} \\
y_2 &= \text{tons de maíz comprado} \\
w_3 &= \text{tons de remolacha vendidas a precio favorable} \\
w_4 &= \text{tons de remolacha vendidas a precio bajo}
\end{aligned}
$$

Función Objetivo

$$\text{mín}\, 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4$$

Restricciones

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 \\
2{,}5x_1 + y_1 - w_1 &\geq 200 \\
3x_2 + y_2 - w_2 &\geq 240 \\
w_3 + w_4 &\geq 20x_3 \\
w_3 &\leq 6000 \\
x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Estocástico

Variables Aleatorias

Rendimiento de los cultivos: $\xi = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$

Función Objetivo

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \mathbb{E}_\xi[Q(x,\xi)] \\
s.a. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
Q(x,s) = \quad & 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
& R_1(s)x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\
& R_2(s)x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\
& w_3 + w_4 \geq R_3(s)x_3 \\
& w_3 \leq 6000 \\
& y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Determinista Equivalente

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{hectáreas destinadas a trigo} \\
x_2 &= \text{hectáreas destinadas a maíz} \\
x_3 &= \text{hectáreas destinadas a remolacha} \\
w_1^s &= \text{tons de trigo vendido en el escenario } s \\
y_1^s &= \text{tons de trigo comprado en el escenario } s \\
w_2^s &= \text{tons de maíz vendido en el escenario } s \\
y_2^s &= \text{tons de maíz comprado en el escenario } s \\
w_3^s &= \text{tons de remolacha vendidas a precio favorable en el escenario } s \\
w_4^s &= \text{tons de remolacha vendidas a precio bajo en el escenario } s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \sum_s p_s\{238y_1^s - 170w_1^s + 210y_2^s - 150w_2^s - 36w_3^s - 10w_4^s\} \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& R_1(s)x_1 + y_1^s - w_1^s \geq 200 \\
& R_2(s)x_2 + y_2^s - w_2^s \geq 240 \\
& w_3^s + w_4^s \geq R_3(s)x_3 \\
& w_3^s \leq 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1^s, y_2^s, w_1^s, w_2^s, w_3^s, w_4^s \geq 0
\end{aligned}
$$

Descomposición de Benders

En primer lugar se trabajará con los tres escenarios descritos, de esta manera existirá un problema maestro correspondiente al costo de primera etapa más el costo proveniente de los subproblemas. En tanto existirán 3 subproblemas, cada uno asociado a cada escenario:

- ITERACIÓN 1:

El problema maestro es:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \frac{1}{3}\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\} \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde la solución es $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y $\gamma_i = -\infty$

Por otra parte, el subproblema para el escenario s es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \phi_s(x) = 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\ & R_1(s)x_1^* + y_1 - w_1 \geq 200 \\ & R_2(s)x_2^* + y_2 - w_2 \geq 240 \\ & w_3 + w_4 \geq R_3(s)x_3^* \\ & w_3 \leq 6000 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{array}$$

Reescribiendo:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \phi_s(x) = 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\ & y_1 - w_1 \geq 200 - R_1(s)x_1^* \\ & y_2 - w_2 \geq 240 - R_2(s)x_2^* \\ & w_3 + w_4 \geq R_3(s)x_3^* \\ & w_3 \leq 6000 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{array}$$

Luego, el dual será:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & (200 - R_1(s)x_1^*)z_1 + (240 - R_2(s)x_2^*)z_2 + (R_3(s)x_3^*)z_3 + 6000z_4 \\ s.a. & z_1 \leq 238 \\ & -z_1 \leq -170 \\ & z_2 \leq 210 \\ & -z_2 \leq -150 \\ & z_3 + z_4 \leq -36 \\ & z_3 \leq -10 \\ & z_1, z_2 \geq 0 \quad z_3, z_4 \leq 0 \end{array}$$

Dado que $x^* = 0$, en este caso todos los subproblemas son iguales:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 200z_1 + 240z_2 + 0z_3 + 6000z_4 \\ s.a. & 170 \leq z_1 \leq 238 \\ & 150 \leq z_2 \leq 210 \\ & z_3 + z_4 \leq -36 \\ & z_3 \leq -10 \\ & z_1, z_2 \geq 0 \quad z_3, z_4 \leq 0 \end{array}$$

El problema se puede resolver fácilmente: $z^* = \begin{pmatrix} 238 \\ 210 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix}$

y $\phi_s(x)^* = 98{,}000$

Ya que todos los subproblemas son factibles, veremos si agregamos cortes de optimalidad (Recordar que cortes de factibilidad se agregan cuando un subproblema es infactible)

Es óptimo?: $\gamma_s \geq \phi_s(x)^*$? No, pues $-\infty \ngeq 98{,}000$. Luego se agregan los cortes de optimalidad.

Los restricciones que se agregaran son:

$$\begin{aligned}(200 - R_1(s)x_1)z_1^* + (240 - R_2(s)x_2)z_2^* + (R_3(s)x_3)z_3^* + 6000z_4^* &\leq \gamma_s \\ 98{,}000 - 238R_1(s)x_1 - 210R_2(s)x_2 - 36R_3(s)x_3 &\leq \gamma_s\end{aligned}$$

- Iteración 2:

El nuevo problema maestro es:

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \frac{1}{3}\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\} \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & 98{,}000 - 714x_1 - 756x_2 - 864x_3 \leq \gamma_1 \\ & 98{,}000 - 595x_1 - 630x_2 - 720x_3 \leq \gamma_2 \\ & 98{,}000 - 476x_1 - 504x_2 - 936x_3 \leq \gamma_3 \\ & x \geq 0\end{aligned}$$