IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J.Correa, R.Epstein
Aux: C.Kuhlman, N. Inostroza, I.Ríos, L.F.Solari

Control 3

Martes 14 de junio de 2011

Pregunta 1

La demanda por computadores que enfrenta una tienda especializada puede ser alta, normal o baja. Los días en que la demanda es alta, el local gana $1.200, cuando la demanda es normal gana $900 y gana solo $600 si la demanda es baja.

El administrador observa que la probabilidad que la demanda de un día sea alta, normal o baja depende solamente de la demanda del día anterior. La siguiente matriz muestra las probabilidades de ocurrencia de demanda de cada día, en función de como fue la demanda el día anterior.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B & M & A \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ M \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcule el valor esperado de la ganancia del local en 15 días, dado que el primer día la demanda ha sido baja. Nota: Puede considerar $P_{15} = lim_{k\to\infty} P_k$

Solución: Calculemos el vector de probabilidades estacionarias π:

$$\pi = \pi P$$
$$\sum_{i=1,2,3} \pi_i = 1$$

Se obtiene:

$$\pi = [1/2; 1/6; 1/3]$$

De acuedo a la notación de cadenas de markov con beneficios, buscamos $V_B(15)$, que cumple la fórmula:

$$V(15) = 15ge + W + P^{15}(V(0) - W)$$

Donde $g = \pi\hat{r}$, con $\hat{r} = [600; 900; 1200]$. De esta manera se tendrá:

$$g = 600 * (1/2) + 900 * (1/6) + 1200 * (1/3) = 300 + 150 + 400 = 850$$

Falta obtener W para poder evaluar en la fórmula, el que viene dado por:

$$ge - \hat{r} = (P - Id)W$$

Hago $W_B = 0$, de donde se puede despejar luego que:

$$W = [-1250, -700, 0]$$

De donde podemos finalmente encontrar:

$$V_B(15) = 15g + W_B - (P^{15}W)_B$$

$$V_B(15) = 15 * 850 + 0 - ((1/2) * (-1250) + (1/6) * (-700)) = 12750 - (-625 - 116{,}667) = 13491{,}667$$

Pregunta 2

Suponga un sistema de atención a clientes cuyas llegadas han sido modeladas de acuerdo a una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$ y cuyas salidas siguen siguen un proceso de poisson de tasa μ. Este sistema funciona con un servidor y tiene una capacidad máxima de K personas. Se está evaluando la posibilidad de contratar a un segundo empleado para que atienda un servidor cuando el sistema empiece a saturarse. Suponga que el segundo operador trabaja cuando en el sistema hay J o más personas.

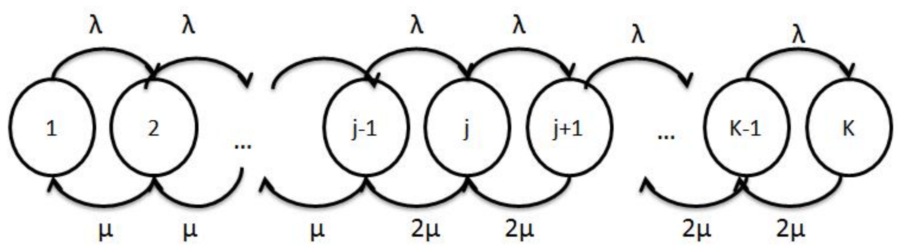
a) Construya una Cadena de Markov en tiempo continuo que modele la situación propuesta. Encuentre las probabilidades estacionarias que definen el sistema.

b) Calcule los indicadores L, L_Q, W, W_Q para el sistema descrito (deje sus ecuaciones expresadas en función de las probabilidades estacionarias. No es necesario que resuelva).

c) Suponga finalmente que el salario a pagar al segundo empleado es de $c[\frac{\$}{hora}]$ por cada hora trabajada. Suponga además que el beneficio recibido por cada cliente que se atiende resulta ser de $g[\frac{\$}{cliente}]$. Plantee el problema de maximización que resuelve el planificador si éste busca la política óptima para escoger J.

Solución:

a. La cadena descrita en el problema se puede dibujar como sigue:



De esta manera las probabilidades estacionarias del problema serán:

$$\pi_k = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^k, 0 \leq k < j$$

$$\pi_k = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^k(\frac{1}{2})^{k-j+1}, j \leq k \leq K$$

Para encontrar el valor de π_0, utilizamos el hecho que $\sum_k \pi_k = 1$

Se resuelve y se encuentra:

$$\frac{1}{\pi_0} = \frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^j}{1-\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^j(\frac{1-(\frac{\lambda}{2\mu})^{K-j+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}})$$

b. Los indicadores quedan expresados como sigue (no es necesario que los resuelvan):

$$L = \sum_{i=1}^{K} i * \pi_i$$

Por Little y reescribiendo la tasa promedio:

$$W = \frac{L}{(1-\pi_K)\lambda}$$

$$L_Q = \sum_{i=1}^{j-1}(i-1)\pi_i + \sum_{i=j}^{K}(i-2)\pi_i$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{(1-\pi_K)\lambda}$$

c. El problema a resolver es:

$$Max_j\{g * \lambda(1-\pi_K) - c * \sum_{i=j+1}^{K}\pi_i\}$$

Pregunta 3

a) Compare el número promedio de unidades en el sistema en los siguientes casos:

   i) 2 sistemas $M|M|1$ con servicio de tasa $\mu[\frac{unidades}{hora}]$

   ii) 1 sistema $M|M|2$ con servicio con tasa $\mu[\frac{unidades}{hora}]$

   iii) 1 sistema $M|M|1$ con servicio con tasa $2\mu[\frac{unidades}{hora}]$

b) Suponga un sistema $M|M|1$ cuyas tasa de llegada y salida son respectivamente λ y μ. Calcule el número promedio de unidades en el sistema dado que el servidor se encuentra ocupado.

c) Suponga ahora que acaba de llegar una unidad al sistema sistema. Calcule el tiempo esperado hasta que el servidor vuelve a estar desocupado.

Solución

a) En esta pregunta no son necesario los cálculos, basta con que entreguen la intuición. Es claro que el peor sistema es aquel con 2 colas $M|M|1$, puesto que desaprovecha tiempos de atención que ocurren en cada una de las colas. Para comparar los otros dos sistemas basta ver que aquel sistema con tasa de atención $2\mu[\frac{unidades}{hora}]$, en cualquier estado del sistema atiende a esta tasa, mientras que el sistema con dos servidores a tasa $\mu[\frac{unidades}{hora}]$, atiende a tasa $2\mu[\frac{unidades}{hora}]$ en todos los estados salvo cuando el sistema tiene solo una unidad dentro, en cuyo caso la tasa es de $\mu[\frac{unidades}{hora}]$. Esto lo hace peor que el anterior.

b) Podemos despejar de la siguiente ecuación:

$$L = \mathbf{E}\{L|ocupado\}P\{ocupado\} + \mathbf{E}\{L|desocupado\}P\{desocupado\}$$
$$L = \mathbf{E}\{L|ocupado\}(1-\pi_0) + 0 * \pi_0$$

De donde se obtiene:

$$\mathbf{E}\{L|ocupado\} = \frac{L}{1-\pi_0}$$

c) Consideremos un ciclo del sistema descrito. Veamos que la fracción del tiempo ocupado versus el tiempo que el sistema pasa desocupado puede escribirse como:

$$\frac{\mathbf{E}\{T_{ocupado}\}}{\mathbf{E}\{T_{desocupado}\}} = \frac{1-\pi_0}{\pi_0}$$

Luego, podemos escribir:

$$\mathbf{E}\{T_{ocupado}\} = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} * \mathbf{E}\{T_{desocupado}\}$$

De donde se obtiene lo pedido:

$$\mathbf{E}\{T_{ocupado}\} = \frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$