**IN3702:** Investigación de Operaciones
**Profs:** J. Correa, R. Epstein
**Auxs:** N. Inostroza, C. Kuhlmann, I. Ríos, L.F. Solari

# Resumen Procesos de Poisson

1. **Distribuciones Útiles**
   - $X \rightsquigarrow Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}; k \in \mathbb{N}^*$
   - $X \rightsquigarrow exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x > 0$
   - $X \rightsquigarrow Bin(n,p) \Rightarrow \mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; k \in \mathbb{N}^*$
   - $X \rightsquigarrow Gamma(\alpha,\beta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}; x > 0$
   - $X \rightsquigarrow U(a,b) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}; a \leq x \leq b$

2. **Ley de Probabilidades**
   Si $N(t)$ es un PPH (Proceso de Poisson Homogéneo) de tasa $\lambda$, entonces $N(t)$ tiene una distribución de Poisson de parámetro $\lambda t$:
   $$\mathbb{P}[N(t)=k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; k \in \mathbb{N}$$
   *Ej:* La llegada de autos a un estacionamiento se puede representar como un PPH de tasa $\lambda \frac{autos}{hora}$. ¿Cuál es la probabilidad que en las primeras 10 horas lleguen 20 autos?
   $$\mathbb{P}[N(10)=20] = \frac{(10\lambda)^{20} e^{-10\lambda}}{20!}; k \in \mathbb{N}$$

3. **Incrementos Estacionarios**
   La probabilidad de ocurrencia de eventos en un intervalo de tiempo depende sólo del tamaño del intervalo.
   *Ej (continuación)*: ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 5 autos entre las 6 y las 8?
   $$\mathbb{P}[5 \text{ autos entre } 6 \text{ y } 8] = \mathbb{P}[N(2)=5] = \frac{(2\lambda)^5 e^{-2\lambda}}{5!}$$

4. **Incrementos Independientes**
   Los eventos ocurridos en intervalos disjuntos de tiempo, son independientes entre sí.
   *Ej (continuación)*: ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 3 autos entre las 5 y las 6, dado que llegaron 2 autos entre las 3 y las 4?
   $$\mathbb{P}[3 \text{ autos entre } 5 \text{ y } 6 — 2 \text{ autos entre } 3 \text{ y } 4] = \mathbb{P}[3 \text{ autos entre } 5 \text{ y } 6] = \mathbb{P}[N(1)=3] = \frac{(1\lambda)^3 e^{-1\lambda}}{3!}$$

5. **Tiempos Entre Eventos Consecutivos**
   Si $N(t)$ es un PPH de tasa $\lambda$, entonces los tiempos entre eventos consecutivos se ditribuyen de forma exponencial de parámetro $\lambda$

6. **Tiempos de Ocurrencia del n-ésimo Evento**
   El tiempo que demora en ocurrir el n-ésimo evento de un PPH de tasa $\lambda$, se ditribuye en forma de $Gamma(n,\lambda)$.
   El tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento es la suma de $n$ v.a. exponenciales. Es sabido que la distribución de la suma de n exponenciales de tasa $\lambda$, distribuye con $Gamma(n,\lambda)$.

7. **Distribución Condicional de Tiempos de Ocurrencia**
   Dado que un evento ocurrió en el intervalo $[t_1, t_2]$, el instante de ocurrencia se distribuye mediante $U(t_1, t_2)$
   *Ej (continuación)*: Si se sabe que un auto entró entre las 6 y las 9. ¿Cuál es la probabilidad que haya llegado antes de las 8?

$$\mathbb{P}[\text{antes de las 8— llegó entre 6 y 9}] = \mathbb{P}[U(6,9) \leq 8] = \int_6^8 \frac{1}{9-6} = \frac{2}{3}$$

   Dado que $n$ eventos ocurrieron en el intervalo $[t_1, t_2]$ y no se conoce el orden de ocurrencia, entonces los instantes de ocurrencia son v.a. *iid* $U(t_1, t_2)$

8. **División de Procesos de Poisson**
   Sea $N(t)$ un PPH de tasa $\lambda$. Si los eventos de $N(t)$ son tipo $A$ con probabilidad p y tipo $B$ con probabilidad (1- p), entonces:

$$\begin{aligned} N_A(t) &= \text{N° de eventos tipo A ocurridos hasta t} \\ N_B(t) &= \text{N° de eventos tipo B ocurridos hasta t} \end{aligned}$$

   Son PPH de tasas $\lambda p$ y $\lambda(1-p)$ respectivamente y son independientes entre sí.

9. **Unión de Procesos de Poisson Independientes**
   Sean $N_A(t)$ y $N_B(t)$ PPH independientes de tasas $\lambda_A$ y $\lambda_B$ respectivamente. Entonces, el proceso $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$ es un PPH de tasa $(\lambda_A + \lambda_B)$.

10. **Propiedad Útil**
    Sea $N(t)$ un PPH de tasa $\lambda$. Sea $S_n$ el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento de $N(t)$, entonces:

$$\mathbb{P}[S_n \leq t] = \mathbb{P}[N(t) \geq n]$$