

Control N^o 2**P1**

Producciones Panda, empresa que organiza eventos masivos, lo ha contratado para planificar el calendario de actividades del próximo año. Los eventos son de distinto tipo: conciertos, deporte o familiar, existiendo un conjunto para cada tipo de evento C , D y F respectivamente. Denotamos $E = C \cup D \cup F$. El año consta de $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ semanas y hay un conjunto L de localidades donde se pueden realizar los eventos.

Cada evento $e \in E$ tiene una demanda estimada de d_{et} personas dispuestas a asistir si el evento ocurre en la semana t , un precio p_e [\$] cobrado a los asistentes, y un costo directo (por traer el evento, permisos, etc.) de c_{etl} [\$] en la semana t en el local l . Por su parte, cada local $l \in L$ tiene una capacidad de k_l [personas] de modo que no necesariamente toda la demanda a un evento puede asistir, y además existe un parámetro de disponibilidad f_{tl} que vale 1 si el local está disponible la semana t y 0 en caso contrario.

La empresa desea imponer ciertas condiciones adicionales al calendario de actividades. En primer lugar en cada período puede haber un máximo de l_t [eventos] simultáneos. Asimismo, se debe garantizar una *asistencia anual total* de al menos q_C, q_D, q_F personas para los 3 tipos de eventos. Por otro lado los únicos eventos que pueden programarse más de una vez (y a lo más dos veces) son los de tipo familiar. Finalmente, hay un conjunto $\mathcal{P}$ de eventos que no pueden ser programados todos dentro de 4 semanas consecutivas (para que así las estimaciones de demanda sean consistentes).

- (a) Tratando de obtener la máxima utilidad, modele el problema como uno de programación lineal entera.
- (b) (bono 1pto) Suponga ahora que cada local $l \in L$ tiene un costo de arriendo de a_{tl} [\$] en la semana t , pero existe la alternativa de pagar un arriendo anual de b_l [\$] que permite ocuparlo en todas las semanas en que está disponible, i.e. $f_{tl} = 1$. Indique como cambia el modelo con esta nueva información.

Pauta:

(a)

Variables: (0.5 puntos cada una)

- $x_{etl} = 1$ si es que contrato el evento e en la semana t en el local l , cero en caso contrario.
- y_{etl} demanda real que asiste (considerando límite de capacidad) a un evento e en la semana t en el local l .

Restricciones: (0.4 puntos cada una)

(1) Naturaleza de las Variables:

$$x_{etl} \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$$

- $y_{etl} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$
- (2) Un evento no lo puedo contratar más de una vez en una semana:

$$\sum_{l \in L} x_{etl} \leq 1 \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}$$
- (3) Un local puede tener a lo más un evento por semana

$$\sum_{e \in E} x_{etl} \leq 1 \quad \forall l \in L, \forall t \in \mathcal{T}$$
- (4) Un local se puede ocupar solo si está disponible:

$$x_{etl} \leq f_{tl} \quad \forall l \in L, \forall t \in \mathcal{T}$$
- (5) Demanda real que asiste a un evento no puede superar capacidad del local:

$$y_{etl} \leq k_l \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$$
- (6) Demanda real que asiste es menor igual a la demanda del evento, y por otro lado si no se hace el evento entonces es cero¹

$$y_{etl} \leq d_{et} x_{etl} \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$$
- (7) Cumplir con mínimo de demanda:

$$\sum_{e \in j, t \in \mathcal{T}, l \in L} y_{etl} \geq q_j \quad \forall j \in \{C, D, F\}$$
- (8) Límite que se puede traer un evento de cada tipo:
- (8a)
$$\sum_{t \in \mathcal{T}, l \in L} x_{elt} \leq 1 \quad \forall e \in C \cup D$$
- (8b)
$$\sum_{t \in \mathcal{T}, l \in L} x_{elt} \leq 2 \quad \forall e \in F$$
- (9) No se pueden juntar ciertos eventos dentro de 4 semanas seguidas:

$$\sum_{e \in p, u \in \{t, \dots, t+3\}, l \in L} x_{eul} \leq |p| - 1 \quad \forall t \in \{1, \dots, T-3\}, \forall p \in \mathcal{P}$$
- (10) Límite de eventos por semana:

$$\sum_{e \in E, l \in L} x_{etl} \leq l_t \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Observaciones:

- En la restricción (1) de naturaleza de las variables, $y_{etl} \in \mathbb{R}_+$ también es correcto.
- En la restricción (2), poner F en vez de E , también está correcto.
- La restricción (3) y (4) se pueden juntar en una sola: $\sum_{e \in E} x_{etl} \leq f_{tl} \quad \forall l \in L, \forall t \in \mathcal{T}$.
- En la restricción (6) estamos considerando **dos** restricciones en una: *Demanda real que asiste debe ser menor igual a la demanda que asiste al evento: $y_{etl} \leq d_{et} \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$* y *No puede haber demanda real a un evento si este no existe: $y_{etl} \leq x_{etl} \quad \forall e \in E, \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$*
- Cada variable vale 0.5 puntos, cada restricción 0.4 y la función objetivo 1.0 puntos. Las restricciones (8a) y (8b) valen 0.2 puntos cada una.

Función Objetivo: (1.0 puntos)

$$\text{máx} \quad \sum_{e \in E, t \in \mathcal{T}, l \in L} p_e y_{etl} - c_{etl} x_{etl}$$

(b)

¹Queremos representar $y_{etl} = \min\{k_l, d_{et}\}$ cuando hay un evento e en semana t en local l , lo cual lo generamos con ambas desigualdades (4) y (5) $y_{etl} \leq k_l$ y $y_{etl} \leq d_{et}$, pues la función objetivo mantendrá a y_{etl} en la igualdad con uno de ambos términos en caso de que se haga un evento, esto se tiene gracias a esta y la restricción anterior.

Hacemos los siguientes cambios, agregamos:

Variables de decisión: (0.2 puntos cada una)

- $z_l = 1$ si contrato el pago anual en el local l , cero en caso contrario.
- $w_{tl} = 1$ si hay el pago por arriendo del local l en la semana t .

Restricciones:

(11) Naturaleza de las Variables: (0.1 puntos)

$$z_l, w_{tl} \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$$

(12) Pago del arriendo del local solo es efectivo cuando se pide el local y cuando no se ha hecho el contrato anual²: (0.4 puntos)

$$w_{tl} \geq -z_l + \sum_{e \in E} x_{etl} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in L$$

Función Objetivo: (0.3 puntos)

$$\max \sum_{e \in E, t \in \mathcal{T}, l \in L} p_e y_{etl} - c_{etl} x_{etl} - \sum_{t \in \mathcal{T}, l \in L} a_{tl} w_{tl} - \sum_{l \in L} b_l z_l$$

P2

Considere el programa lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - x_2 + 12x_3 - x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 16 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- Compruebe que el punto $x^* = (3, 0, 0, 0, 1)$ es una solución básica factible.
- Calcule los costos reducidos y concluya que x^* es solución óptima.
- Escriba el problema dual y encuentre una solución óptima. ¿Es única esta solución?
- Suponga que en la segunda restricción cambiamos el lado derecho 16 por un valor b . Indique el intervalo máximo para b en el cual la base anterior sigue siendo óptima, e indique como cambia el valor óptimo del problema en función de b en dicho intervalo.

Pauta:

- Compruebe que el punto $x^* = (3, 0, 0, 0, 1)$ es una solución básica factible.**

Primero se verifica que el punto x^* es factible, ya que cumple con las 2 restricciones de igualdad, más las 5 restricciones de no-negatividad. Para demostrar que es solución básica factible hay 2 formas:

²Aquí lo que importa es que si es que hay un evento en el local l en la semana t , y además no se decide pagar un contrato anual, entonces se debe pagar el arriendo y por ende w_{tl} debe ser 1, en caso de que no ocurra alguno de estas cosas, entonces la variable tomará valor cero por la forma de la función objetivo

1. Como el problema está en R^5 , se puede argumentar que 5 de las restricciones se cumplen con igualdad:

$$3x_1^* + 2x_2^* + x_3^* + x_5^* = 10$$

$$5x_1^* + 3x_2^* + x_4^* + x_5^* = 16$$

$$x_2^* = 0$$

$$x_3^* = 0$$

$$x_4^* = 0$$

2. Dado que el problema está en forma estándar, basta con argumentar que el punto x^* tiene $(n - m) = (5 - 2) = 3$ componentes nulas.

- (b) **Calcule los costos reducidos y concluya que x^* es solución óptima.**

Primero, elegimos la base asociada al punto x^* . Usamos como variables no básicas las 3 componentes nulas de x^* y nos queda:

$$x_B = \{x_1, x_5\}, x_N = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Los costos reducidos son los siguientes:

$$\bar{c}_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N$$

$$\bar{c}_N = (-1 \quad 12 \quad 0) - (-5 \quad -1) \cdot -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = (-1 \quad 12 \quad 0) + \frac{1}{2} \cdot (-5 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = (-1 \quad 12 \quad 0) + \frac{1}{2} \cdot (6 \quad 0 \quad 2)$$

$$\bar{c}_N = (2 \quad 12 \quad 1)$$

Luego, como todos los costos reducidos de las variables no básicas son positivos, no hay ninguna dirección básica que reduzca la función objetivo, por lo que la solución x^* es óptima.

- (c) **Escriba el problema dual y encuentre una solución óptima. ¿Es única esta solución?**

El problema dual es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{máx} && 10y_1 + 16y_2 \\
&&& 3y_1 + 5y_2 \leq -5 \\
&&& 2y_1 + 3y_2 \leq -1 \\
&&& y_1 \leq 12 \\
&&& y_2 \leq 0 \\
&&& y_1 + y_2 \leq -1 \\
&&& y_1, y_2 \quad \text{libres}
\end{aligned}$$

Hay 2 formas sencillas de encontrar el óptimo de este problema:

1. Teorema de Holgura Complementaria:

$$y_1^* \cdot (3x_1^* + 2x_2^* + x_3^* + x_5^* - 10) = 0 \Rightarrow \text{Nada (restricción primal activa)}$$

$$y_2^* \cdot (5x_1^* + 3x_2^* + x_4^* + x_5^* - 16) = 0 \Rightarrow \text{Nada (restricción primal activa)}$$

$$x_1^* \cdot (-5 - 3y_1^* - 5y_2^*) = 0 \Rightarrow 3y_1^* + 5y_2^* = -5$$

$$x_2^* \cdot (-1 - 2y_1^* - 3y_2^*) = 0 \Rightarrow \text{Nada (variable primal nula)}$$

$$x_3^* \cdot (12 - y_1^*) = 0 \Rightarrow \text{Nada (variable primal nula)}$$

$$x_4^* \cdot (0 - y_2^*) = 0 \Rightarrow \text{Nada (variable primal nula)}$$

$$x_5^* \cdot (-1 - y_1^* - y_2^*) = 0 \Rightarrow y_1^* + y_2^* = -1$$

Luego, la solución óptima viene de resolver el sistema:

$$3y_1^* + 5y_2^* = -5$$

$$y_1^* + y_2^* = -1$$

Finalmente, $y_1^* = 0$, $y_2^* = -1$ por lo que el valor óptimo del problema dual está dado por $w^* = -16$. Como el sistema tiene solución única, luego el óptimo del problema dual es único.

2. Gráficamente:

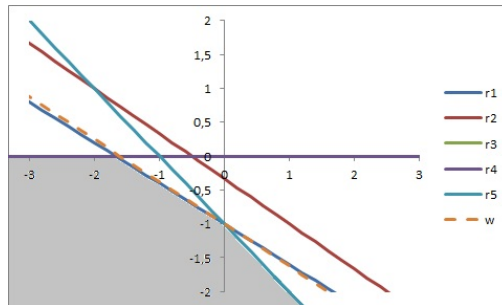


Figura 1: Región Factible y Función Objetivo del Problema Dual

Del gráfico se puede apreciar que la última curva de nivel que intersecta la región factible en la dirección de crecimiento, lo hace en el punto $(0, -1)$, por lo que éste es óptimo. Como además, la pendiente de la función objetivo $(-\frac{10}{16})$ es distinta a la de las restricciones activas en este punto $(-\frac{5}{3})$ y (-1) se concluye que es único.

- (d) Suponga que en la segunda restricción cambiamos el lado derecho 16 por un valor b . Indique el intervalo máximo para b en el cual la base anterior sigue siendo óptima, e indique como cambia el valor óptimo del problema en función de b en dicho intervalo.

El problema queda:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -5x_1 - x_2 + 12x_3 - x_5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = \mathbf{b} \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Para que la base actual siga siendo óptima se deben satisfacer las condiciones de factibilidad y optimalidad:

• **Factibilidad:**

$$\bar{b} = A_B^{-1}b \geq 0$$

$$\bar{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b - 10 \\ 50 - 3b \end{pmatrix} \geq 0$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} b & \geq 10 \\ b & \leq \frac{50}{3} \end{aligned}$$

Luego, b puede moverse en el intervalo $[10, \frac{50}{3}]$ sin que la base óptima cambie.

• **Optimalidad:**

Como el vector del lado derecho de las restricciones no tiene influencia en los costos reducidos, aún se tiene que: $\bar{c}_N = (2 \ 12 \ 1) \geq 0$, por lo que la base se mantiene óptima.

El valor de la función objetivo dada esta base es: $z = -5x_1 - x_5$, ya que las demás variables son no básicas y, por lo tanto, son nulas.

Como el valor de las variables básicas viene dado por $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b - 10 \\ 50 - 3b \end{pmatrix}$ el valor de la función objetivo en este tramo será:

$$z = -5 \cdot \left(\frac{b - 10}{2} \right) - \left(\frac{50 - 3b}{2} \right) = -b$$

P3

Para cada una de las siguientes afirmaciones justifique (en no mas de cinco líneas) si ellas son verdaderas o dé un contraejemplo en caso contrario:

- (a) Para todo problema factible de optimización lineal con dominio acotado, el problema dual asociado, siempre tiene solución óptima.
- (b) Todo poliedro factible tiene algún punto extremo.
- (c) Si un poliedro tiene un punto extremo degenerado, entonces tiene una restricción redundante.
- (d) Si un problema de maximización sobre un poliedro posee una solución óptima que es un punto extremo, entonces, todas las bases asociadas al punto óptimo tiene costos reducidos negativos.
- (e) Para un poliedro $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ en forma estándar, un punto extremo x^* asociado a una base B es no-degenerado si y solo si $A_B^{-1}b > 0$.
- (f) Para todo problema (P) $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y su dual (D) $\min\{b^t y : A^t y \geq c, y \geq 0\}$, se tiene que los valores óptimos son iguales.

Pauta:

- (a) **Para todo problema factible de optimización lineal con dominio acotado, el problema dual asociado, siempre tiene solución óptima.**
Verdadero, como el problema es factible y acotado, entonces tiene solución óptima finita y por el Teorema de Dualidad Fuerte, su dual también tiene solución óptima finita.
- b) **Todos poliedro factible tiene algún punto extremo.**
Falso, basta considerar cualquier semiespacio como $P = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 \geq 0\}$ que es un poliedro factible pero no posee puntos extremos.
- c) **Si un poliedro tiene un punto extremo degenerado, entonces tiene una restricción redundante.**
Falso, basta considerar el siguiente poliedro en R^3 :

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + x_3 &\leq 1 \\ x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_2 + x_3 &\leq 1 \\ x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

que es una pirámide de base cuadrada, donde la punta (el punto $(0, 0, 1)$) está determinada por 4 restricciones y, sin embargo, ninguna es redundante.

- d) **Si un problema de maximización sobre un poliedro posee una solución óptima que es un punto extremo, entonces, todas las bases asociadas al punto óptimo tiene costos reducidos negativos.**

Falso. Primero hay que notar que como se trata de un problema de maximización, la base óptima debe tener asociados costos reducidos no-positivos.

En primer lugar, la afirmación no está considerando la posibilidad de que el problema tenga más de una solución óptima, como por ejemplo en el problema:

$P = \{ \max x_1 + x_2 / x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0 \}$ donde en los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ se tiene un costo reducido igual a 0.

(Si sólo se responde esto, dar 70 % del puntaje)

En el caso en que la solución óptima sea única, pero el punto es degenerado, puede ocurrir que alguna de las bases asociadas al punto óptimo tenga algún costo reducido positivo, por ejemplo en el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } & x_1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

donde el punto óptimo es $x^* = (1, 0, 0, 0)$

Si usamos la base formada por las variables x_1 y x_3 tenemos:

$$\begin{aligned} x_B &= \{x_1, x_3\}, x_N = \{x_2, x_4\} \\ A_B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos los costos reducidos asociados al problema de maximización:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N &= c_N - c_B A_B^{-1} A_N \\ \bar{c}_N &= (0 \ 0) - (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \bar{c}_N &= - (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \bar{c}_N &= (1 \ -1) \end{aligned}$$

Luego, se tiene un costo reducido positivo asociado a la variable x_2 , por lo que la base no es óptima, a pesar de que el punto sí lo es.

(Si sólo se responde esto, dar todo el puntaje)

- e) **Para un poliedro $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ en forma estándar, un punto extremo x^* asociado a una base B es no-degenerado si y sólo si $A_B^{-1}b > 0$.**

Verdadero:

$\Rightarrow$ Si un punto extremo es no degenerado, entonces exactamente n restricciones se cum-

plen con igualdad en él, las m de $Ax = b$ más $(n - m)$ restricciones de no negatividad. Luego, las m variables restantes son estrictamente positivas y vienen dadas por $x_B = A_B^{-1}b > 0$.

[$\Leftarrow$] Si se tiene que $A_B^{-1}b = x_B > 0$, entonces hay m variables estrictamente positivas, por lo que hay exactamente $(n - m)$ variables nulas. Esto más las m restricciones activas que vienen de $Ax = b$, se tienen exactamente n restricciones activas en el punto, por lo que es no degenerado.

- f) **Para todo problema (P) $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y su dual (D) $\min\{b^ty : A^ty \geq c, y \geq 0\}$, se tiene que los valores óptimos son iguales.**

Falso, esto sólo ocurre cuando ambos problemas son factibles y tienen solución óptima finita. (Teorema de Dualidad Fuerte)

Puede ocurrir que ambos sean infactibles o que uno sea infactible y el otro no acotado, en tales casos no se cumple la afirmación. Basta considerar el problema:

$$\begin{aligned} (P) \max \quad & x_1 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

que es no acotado, y su dual:

$$\begin{aligned} (D) \min \quad & 2y_1 \\ & y_1 \geq 1 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

infactible.