Profesores: Daniel Espinosa, Roberto Cominetti

Coordinador: Nicolás Padilla

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Charles Thraves, Alfredo Torrico

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Auxiliar 7

12 Mayo 2011

Lema de Farkas:

Sea $A \in R^{mxn}$ y $b \in R^{m}$. Entonces exactamente una de las dos proposiciones es cierta:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $Ax = b$.
2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^t A \geq 0$ y $y^t b < 0$

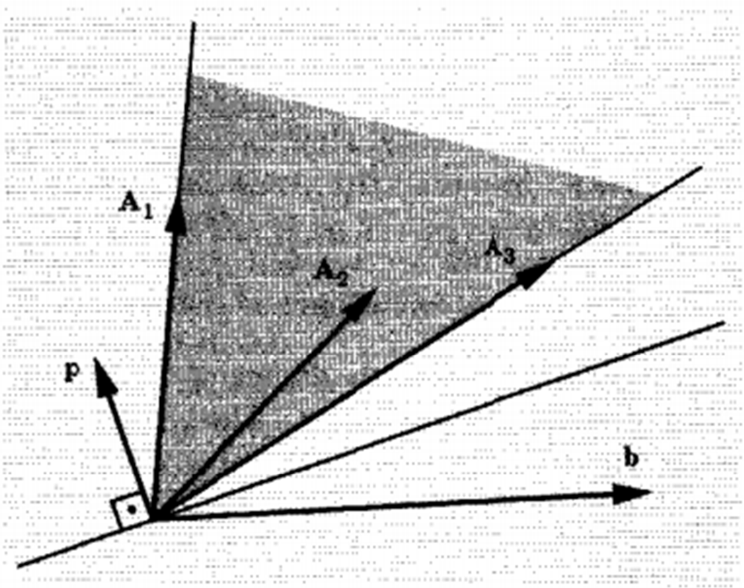
Problema 1

¿Cuál es la interpretación geométrica del Lema de Farkas?

Respuesta:

Si A_i son las columnas de A. Luego $Ax = b \Rightarrow \sum A_i x_i = b$ con $x_i \geq 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, b es una combinación lineal positiva de los A_i.

Si esto no se cumple existe un vector y con un hiperplano asociado $\{z \mid y^t z = 0\}$ tal que b se encuentra en el lado del hiperplano donde no están las combinaciones lineales positivas de A_i. Por lo tanto, tenemos $y^t b < 0$ e $y^t A_i \geq 0 \; \forall i$.



Problema 2

Sea $A \in R^{mxn}$ y $b \in R^m$. Muestre que las siguientes expresiones son equivalentes:

1. $\exists x \geq 0$ tal que $Ax = b \Leftrightarrow \forall \mathrm{y}\ \mathrm{yA} \geq 0 \quad \mathrm{yb} \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq b \Leftrightarrow \mathrm{yb} \geq 0\ \forall \mathrm{y}: \ \mathrm{yA} = 0, \mathrm{y} \geq 0$
3. $\exists x \geq 0$ tal que $Ax \leq b \Leftrightarrow \mathrm{yb} \geq 0\ \forall \mathrm{y} : \mathrm{y} \geq 0, \mathrm{yA} \geq 0$

Solución:

$\mathbf{3 \Rightarrow 2}$

Supongamos que existe x tal que $Ax \leq b$. Sea $x^+, x^- \geq 0$ tales que $x = x^+ - x^-$. Con esto se obtiene que $\bar{A}\bar{x} = b$ con $\bar{A} = [A| - A]$ y con $dim(\bar{A}) = mx2n$, y con $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\bar{x} = \binom{x^+}{x^-}$.

Aplicando (3) se obtiene que $yb \geq 0\ \forall y: y \geq 0, y^t\bar{A} \geq 0$. Esto último es equivalente a:

$y\bar{A} \geq 0 \Leftrightarrow \quad yA \geq 0 \wedge y(-A \quad) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad yA = 0$■.

$\mathbf{2 \Rightarrow 1}$

Supongamos que existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Luego eso es equivalente a:

$$x \geq 0 \quad Ax \leq b \quad Ax \geq b$$

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n$$

Luego aplicamos (2) a ese caso y se obtiene que:

$$y'^t A' = 0\,, y' \geq 0, \quad y'^t b' \geq 0$$

Con $A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Con esto podemos decir que:

$$y'^t A' = 0\,, y' \geq 0, \quad y'^t b' \geq 0$$
$$(y_1 - y_2)^t A = y_3^t \qquad (y_1 - y_2)^t b \geq 0 \qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Luego nos podemos definir $y = y_1 - y_2$. Notar que y puede ser positivo o negativo. Con esto se tiene que $y^t b \geq 0, y^t A = y_3^t \geq 0$, con lo que se concluye.

$\mathbf{1 \Rightarrow 3}$

Supongamos que existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$. Definimos $u = b - Ax \geq 0$. Luego se obtiene que:

$$\boldsymbol{Ax + u = b} \qquad \boldsymbol{x, u \geq 0}$$

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$$

Aplicamos 1.

$$\mathrm{y^t b} \geq 0 \;\; \forall \mathrm{y}\text{: } \mathrm{y^t \overline{A}} \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathrm{y^t b} \geq 0 \;\; \forall \mathrm{y}\text{: } \mathrm{y^t A} \geq 0 \;\; \mathrm{y} \geq 0 \; \blacksquare$$

Problema 3

Considere el problema de ruteo con capacidades y ventanas de tiempo,donde V es un conjunto de clientes con demandas $d_v \; \forall v \in V$ y tiempos de atención $t_v^i, t_v^f \; \forall v \in V$ (cada cliente debe ser visitado durante ese intervalo detiempo). Suponga que se conocen los costos c_{ij} y tiempos de viajes t_{ij} ,$\forall i, j \in VU\{b\}$, donde b representa a la bodega. Suponga además que se considera usar una flota homogénea de vehículos con capacidad K_o, y con costo unitario por vehículo c_o.

1. Formule el problema de minimizar costos totales como un problema lineal entero.

2. ¿Cómo cambia el modelo si ahora consideramos dos tipos de vehículos, con tiempos de viajes iguales, pero costo por viajes distintos c_{ij}^k: $k \in \{1,2\}; i, j \in V \; U \; \{b\}$ y costos fijos $c_o^k, k \in \{1,2\}$?

Solución:

1.

$$\text{máx} \sum_{i,j\in V_o,k\in K} c_{ij}x_{ijk} + \sum_{i\in V,k\in K} c_o x_{bik}$$

$$\sum_{j\in V_o} x_{ijk} - \sum_{j\in V_o} x_{jik} = 0 \qquad \forall i \in V, k \in K \text{ (flujo)} \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in V_o,k\in K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in V \text{ (visitar clientes)} \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in V,i\in V_o} d_j x_{ijk} \leq K_o \qquad \forall k \in K \text{ (capacidad)} \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in V} x_{bik} \leq 1 \qquad \forall k \in K \text{ (una vuelta)} \qquad (4)$$

$$\sum_{i,j\in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \qquad \forall k \in K, \forall S \subsetneq V \text{ (sub-tour)} \qquad (5)$$

$$s_i + t_{ij}x_{ijk} - (1 - x_{ijk})M \leq s_j \qquad \forall i \in V_o, j \in V, k \in K \text{ (variables temporales)} \qquad (6)$$

$$t_v^i \leq s_i \leq t_i^f \qquad \forall i \in V \text{ (restriccion temporal)} \qquad (7)$$

$$s_i \geq 0, x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \text{(naturaleza variables)} \qquad (8)$$

Donde asumimos que $d_v \leq K_o$, ademas asumimos que todos los costos son positivos, asi como tambien que las ventanas de tiempo son positivas y no vacias,

2.

En este caso lo unico que tenemos que hacer es una copia del modelo de la parte 1, sin la restriccion (2). Digamos que el modelo conjunto usa variables x^1 y x^2 para cada tipo de vehiculo usado, entonces, solo debemos agregar la restriccion

$$\sum_{j \in V_o, k \in K} x_{ijk}^2 + x_{ijk}^1 = 1 \qquad \forall i \in V \text{ (visitar clientes)} \tag{9}$$