INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinosa, Roberto Cominetti

Coordinador: Nicolás Padilla
Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Charles Thraves, Alfredo Torrico

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar Extra Control 2
Mayo 2011

OJO: En esta auxiliar no es netamente de preparación para el control 2, sino que es para complementar las temáticas que no alcanzamos a ver en las clases auxiliares.

Problema 1 (SIMPLEX Fase I)

Sea el siguiente problema (P) de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
(P)\ Max \quad & z = x_1 + x_2 \\
s.a.\quad & \\
& 2x_2 - 3x_1 \leq 6 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Utilizando fase 1 de Simplex encuentre una base primal factible. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración.

(b) A partir de la base encontrada en (a) desarrolle fase 2 de Simplex. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración. ¿Qué sucede? Fundamente su conclusión a través de Simplex.

Problema 2 (Análisis de Sensibilidad)

Considere el clásico problema de combinación de productos sujeto a restricciones de disponibilidad de recursos:

$$
\begin{gathered}
\max x_1 + 3x_2 \\
x_1 + 4x_2 \leq 100 \\
x_1 + 2x_2 \leq 60 \\
x_1 + x_2 \leq 50 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

1. Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones.
2. Realice un análisis de sensibilidad para el vector de coeficientes de la función objetivo.
3. Suponga que se evalúa la posibilidad de fabricar un nuevo producto x_{nuevo} de modo que el problema queda descrito como:

$$\max x_1 + 3x_2 + x_{nuevo}$$
$$x_1 + 4x_2 + 5x_{nuevo} \leq 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_{nuevo} \leq 60$$
$$x_1 + x_2 + 2x_{nuevo} \leq 50$$
$$x_1, x_2, x_{nuevo} \geq 0$$

¿Sigue siendo óptima la solución del problema?

Hint: En el óptimo, la base esta formada por las variables x1, x2 y x5, en donde se han asignado las variables x3, x4 y x5 como holgura de las restricciones según el orden enunciado.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinosa, Roberto Cominetti

Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Charles Thraves, Alfredo Torrico

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Pauta Auxiliar Extra Control 2
Mayo 2011

OJO: En esta auxiliar no es netamente de preparación para el control 2, sino que es para complementar los problemas que no alcanzamos a ver en las clases auxiliares.

Problema 1

a)

Transformamos el problema a la forma canónica y agregamos variables artificiales:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad t_1 + t_2 \\
&s.a. \\
&-3x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 6 \\
&x_2 - x_4 + t_2 = 2 \\
&x_i \geq 0, t_j \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots 4, j = 1,2
\end{aligned}
$$

Comenzamos a iterar, la base inicial está asociada a las variables artificiales,

FASE I

Iteración 1:

$$B_1 = I_2 \; R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_1 = R_1$$

$$\bar{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } x_2$$

$$\min \left\{ \frac{6}{2} \quad \frac{2}{1} \right\} = 2 \Rightarrow \text{sale } t_2$$

Iteración 2:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } x_4$$

$$\min \left\{ \frac{2}{2} \right\} = 1 \Rightarrow \text{sale } t_1$$

Iteración 3:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.5 & -1.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\overline{c}_r^T = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1) \geq 0$

Terminamos fase 1, la base primal factible es B_3, asociada a x_4 y x_2.

b)

FASE 2

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\overline{c}_r^T = (-1.5 \quad -0.5) \Rightarrow$ entra x_1

Pero $\overline{a}_{i1} < 0 \ \forall i = 1,2$.

Todos los coeficientes de x_1 en las restricciones son <= 0

x_1 puede crecer indefinidamente. **Problema no acotado.**

Problema 2

Primero, pasamos el problema a su forma estándar:

$$\begin{aligned} &min\, z = -x_1 + -3x_2 \\ &s.t.\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 100 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ &x_1 + x_2 + +x_5 = 50 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ \geq 0 \end{aligned}$$

Además nos dicen que la solución óptima, está conformada por la base de x1, x2 y x5, luego:

$$\mathrm{A_B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathrm{A_B^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ante variaciones del vector b, solo necesitamos analizar factibilidad, es decir, $B^{-1}b \geq 0$.

$$A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Se podría hacer un análisis general que conlleva a generar espacios de soluciones, pero en vez de eso haremos un análisis ceteris paribus (dejando todos los parámetros constantes menos uno).

Para b_1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + 120 \\ \frac{b_1}{2} - 30 \\ \frac{b_1}{2} - 40 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Entonces tenemos que:

$$-b_1 + 120 \geq 0 \quad => \quad b_1 \leq 120$$

$$\frac{b_1}{2} - 30 \geq 0 \quad => \quad b_1 \geq 60$$

$$\frac{b_1}{2} - 40 \geq 0 \quad => \quad b_1 \geq 80$$

Entonces intersectando las soluciones de esas tres ecuaciones se concluye que ante variaciones de b_1, se mantiene la factibilidad de la solución si:

$$80 \leq b_1 \leq 120$$

Para b_2:

El procedimiento es el mismo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ b_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 + 2b_2 \\ 50 - \frac{b_2}{2} \\ 50 - \frac{3b_2}{2} + 500 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

y se obtiene que:

$$50 \leq b_2 \leq \frac{200}{3}$$

Para b_3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100+120 \\ 50-30 \\ 50-90+b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Y se tiene que:

$$b_3 \leq 40 \blacksquare$$

2. Para variaciones en el vector de costo solo se debe ver que ante variaciones de este, se mantenga la condición de optimalidad, es decir que los costos reducidos sean mayores que cero.

Para c_1:

Como x_1 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos

$$\begin{aligned} (\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5)\, \mathrm{A_B^{-1}}\mathrm{A_N} \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &\models -(c_1 - 3/2, -2c_1 + 3/2) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Entonces para mantener optimalidad se tiene que (ceteris paribus):

$$\frac{3}{4} \leq c_1 \leq \frac{3}{2}$$

Para c2:

Nuevamente x2 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} (\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5)\, \mathrm{A_B^{-1}}\mathrm{A_N} \\ &= (0,0) - (-1, -c_2, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0) - (-1, -c_2, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= -(1 - \frac{c_2}{2}, -2 + \frac{c_2}{2}) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Entonces:

$$2 \leq c_2 \leq 4$$

Obs: Análisis para c3, c4 y c5 no tienen sentido para este problema pues las variables asociadas son las de holgura. De todas formas, el procedimiento es análogo (con la diferencia que cuando es variable no básica podrían hacerse menos cálculos).

3. Adelantando un poco, este problema cabe dentro de análisis post-optimal pues veremos cual es nuevo óptimo para una variación dada del los parámetros del problema. Claramente la incorporación de este nuevo producto, como no se esta produciendo ($x_{nuevo} = 0$), no viola la factibilidad del problema. Luego, sólo tenemos que verificar la optimalidad:

$$\begin{aligned}
(\bar{c}_{nuevo}, \bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (-1,0,0)(-1,-3,0)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -(3, 1/2, 1/2) \geq (0,0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la base sigue siendo óptima.