

Análisis de Sensibilidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 5

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Consideremos el problema (P) en forma estándar y su dual (D):

$$(P) \text{ Min } c'x$$

$$(D) \text{ Max } y'b$$

$$Ax = b$$

$$y'A \leq c'$$

- Supongamos $x \geq 0$ que tenemos la base óptima A_B y la solución óptima asociada x^* .
- Si alguno de los coeficientes de b ó c cambia:
 - ¿Se mantiene la base óptima?
 - ¿Cómo calcular la nueva solución óptima sin resolver el problema otra vez?
- Como A_B es la base óptima sabemos que cumple las condiciones de:
 - Factibilidad:** $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$
 - Optimalidad:** $\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1}A_N \geq 0'$
- Si al cambiar el problema se siguen cumpliendo ambas condiciones, entonces la base se mantiene óptima.

Cambios en el Vector b

- Supongamos que la i -ésima componente de b es aumentada en δ
 - Equivalentemente, b se reemplaza por $b + \delta e_i$
- Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.

- **Factibilidad:** $A_B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$

$$x_B + \delta A_B^{-1} e_i \geq 0$$

- Sea g la i -ésima columna de A_B^{-1} : $x_B + \delta g \geq 0$

- Luego $\delta \left\{ \begin{array}{ll} \geq \frac{-(x_B)_j}{g_j} & \forall j / g_j > 0 \\ \leq \frac{-(x_B)_j}{g_j} & \forall j / g_j < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\max_{\{j/g_j > 0\}} \left[\frac{-(x_B)_j}{g_j} \right] \leq \delta \leq \min_{\{j/g_j < 0\}} \left[\frac{-(x_B)_j}{g_j} \right]}$

Cambios en el Vector b

- **Optimalidad:**

- Al variar b, los costos reducidos no se ven afectados

$$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0'$$

- El nuevo costo óptimo está dado por:

$$c'_B A_B^{-1} (b + \delta e_i) = y'^* b + \delta y_i$$

- Donde y^* es la solución óptima del problema dual (precio sombra)

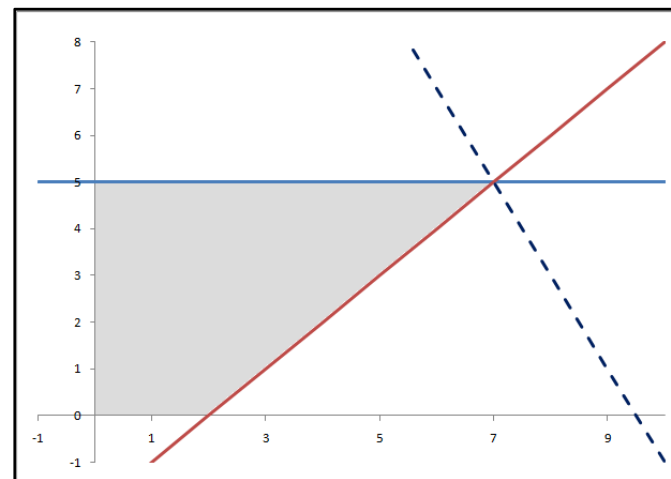
- **Ejemplo:**

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$

$$x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Cambios en el Vector b

- En forma estándar:

$$\text{Min } -2x_1 - x_2$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- La base óptima es:

$$\begin{matrix} x_B = \{x_1, x_2\} \\ x_N = \{x_3, x_4\} \end{matrix} \text{ con } A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Factibilidad:

$$A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

- Optimalidad:

$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \ 0) - (-2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \ 2) \geq 0$$

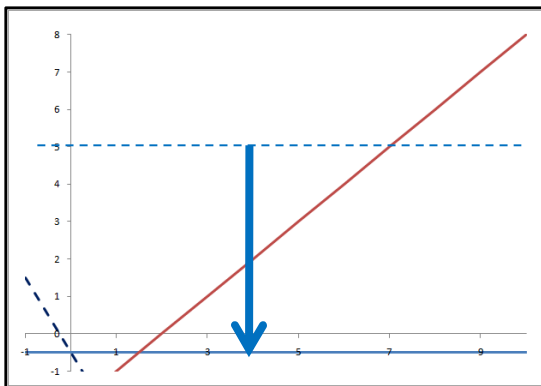
Cambios en el Vector b

- Si cambiamos b_1 : $\text{Min } -2x_1 - x_2$
 $x_2 + x_3 = b_1$
 $x_1 - x_2 + x_4 = 2$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

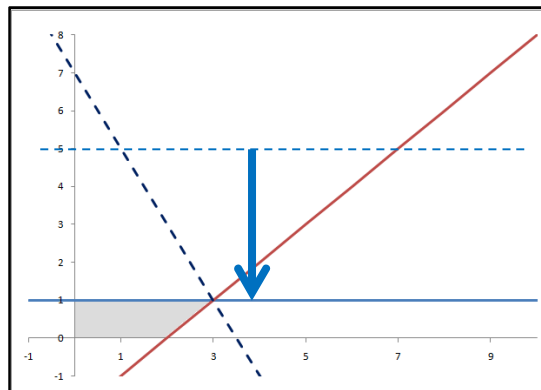
- Factibilidad:

$$A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} b_1 \geq -2 \\ b_1 \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad b_1 \geq 0$$

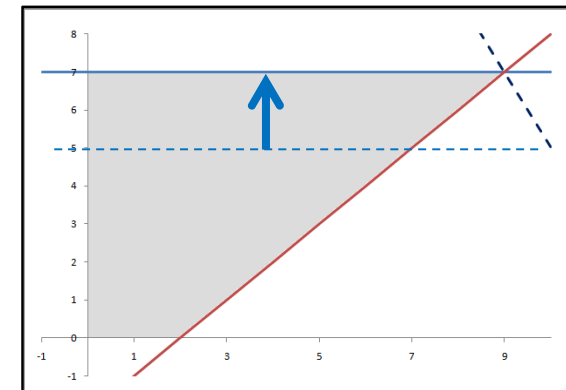
- Es decir, para cualquier b_1 positivo la base se mantiene óptima



$b_1 = -0.5$ (infactible)



$b_1 = 1$ (base aún óptima)



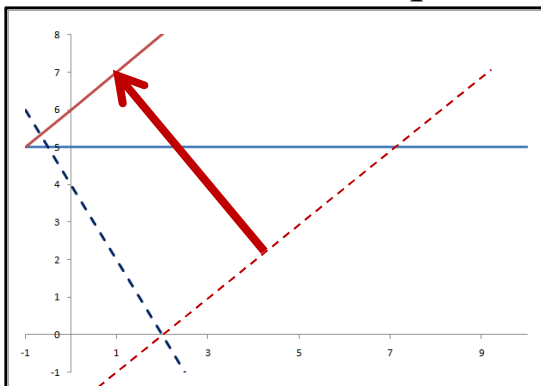
$b_1 = 7$ (base aún óptima)

Cambios en el Vector b

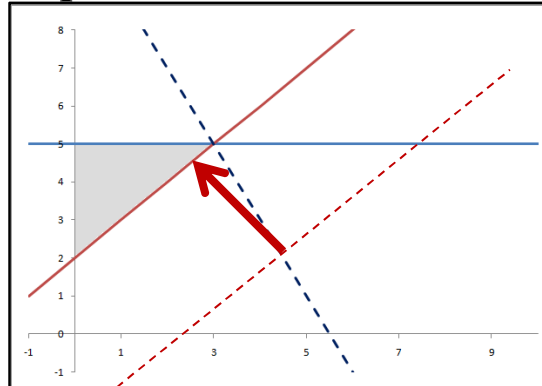
- Si cambiamos b_2 :
$$\begin{aligned} \text{Min } & -2x_1 - x_2 \\ & x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = b_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$
- Factibilidad:

$$A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + b_2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \geq -5$$

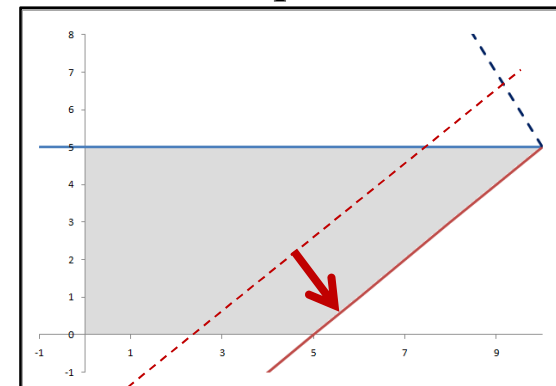
- Es decir, para cualquier $b_2 \geq -5$ la base se mantiene óptima



$b_2 = -6$ (infactible)



$b_2 = -2$ (base aún óptima)



$b_2 = 5$ (base aún óptima)

Cambios en el Vector c

- Supongamos que la j -ésima componente de c es aumentada en δ
 - Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.
- **Factibilidad:**
 - Al variar c , la región factible no cambia y no se afecta la factibilidad: $A_B^{-1}b \geq 0$
- **Optimalidad:** $c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$
 - Si c_j es el costo de una variable no básica, c_B no cambia y se tiene la condición: $c'_j + \delta \geq c'_B A_B^{-1} A_j$
 - Equivalentemente, usando los costos reducidos:
$$\delta \geq -\bar{c}'_j$$

Cambios en el Vector c

- Si c_j es el costo de una variable básica y cambia a $c_j + \delta$
 - Equivalentemente los costos de las variables básicas ahora son:

$$c_B + \delta e_k$$

- Donde $j = B(k)$ (la k-ésima variable básica)

- Se tiene que:

$$(c_B + \delta e_k)' A_B^{-1} A_N \leq c'_N$$

- Luego:

$$\delta (A_B^{-1} A_N)_k \leq \bar{c}'_N$$

- Sea q la k-ésima fila de $(A_B^{-1} A_N)$

$$\delta \begin{cases} \leq \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & q_i > 0 \\ \geq \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & q_i < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\max_{\{i/q_i < 0\}} \left[\frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} \right] \leq \delta \leq \min_{\{i/q_i > 0\}} \left[\frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} \right]}$$

Cambios en el Vector c

- Ejemplo:

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$

$$x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

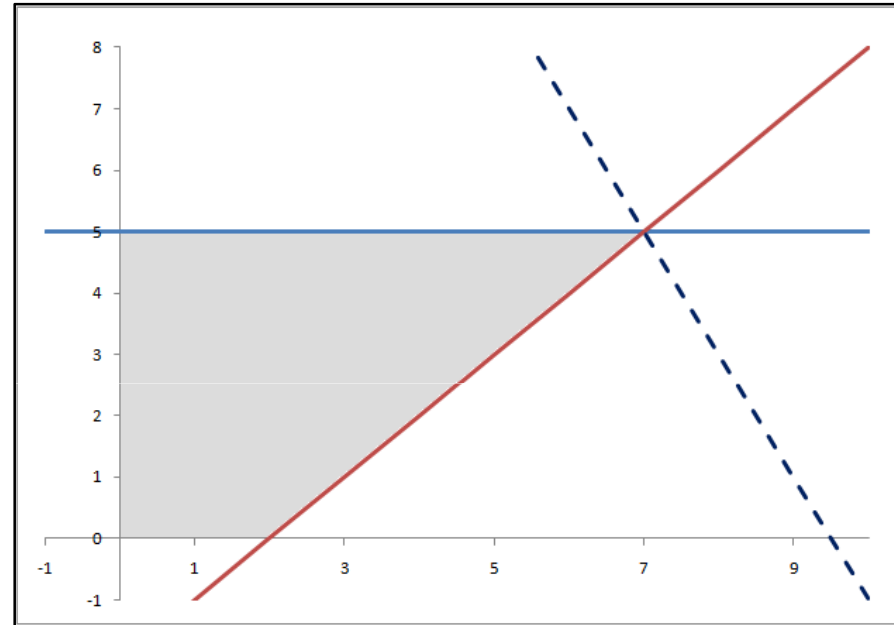
- En forma estándar:

$$\text{Min } -2x_1 - x_2$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



- Al variar los coeficientes de la función objetivo se cambia su pendiente...

Cambios en el Vector c

- Si cambiamos c_1 :

$$\text{Min } c_1 x_1 - x_2$$

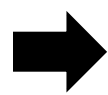
$$x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

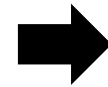
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Optimalidad:

$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \ 0) - (c_1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 - c_1 \ -c_1) \geq 0$$

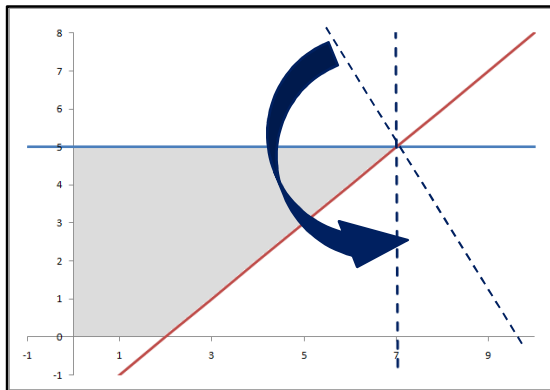


$$\begin{aligned} c_1 &\leq 1 \\ c_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

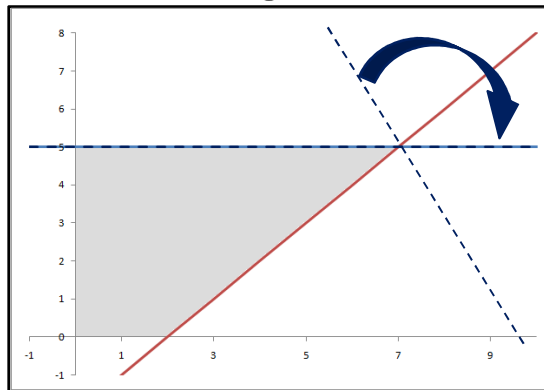


$$c_1 \leq 0$$

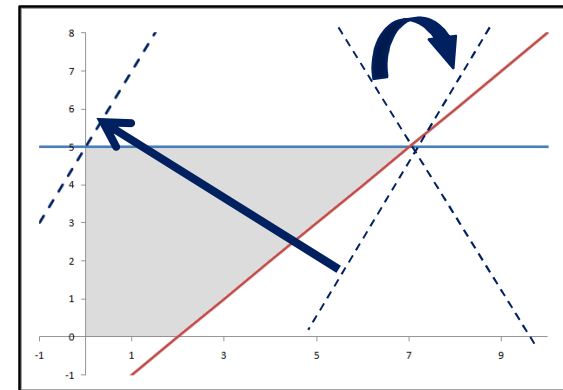
- Es decir, para cualquier c_1 negativo la base se mantiene óptima



$c_1 = -200$ (base aún óptima)



$c_1 = 0$ (base aún óptima)



$c_1 = 2$ (la base óptima cambió)

Cambios en el Vector c

- Si cambiamos c_2 :

$$\text{Min } -2x_1 + c_2x_2$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

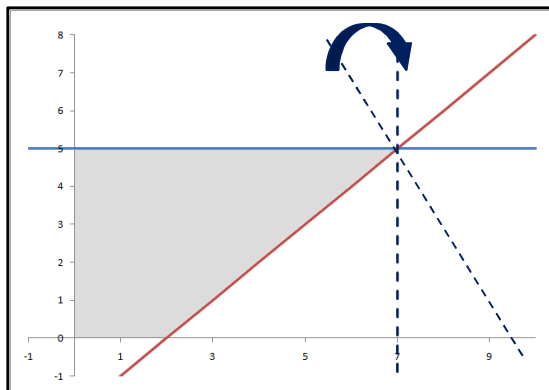
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

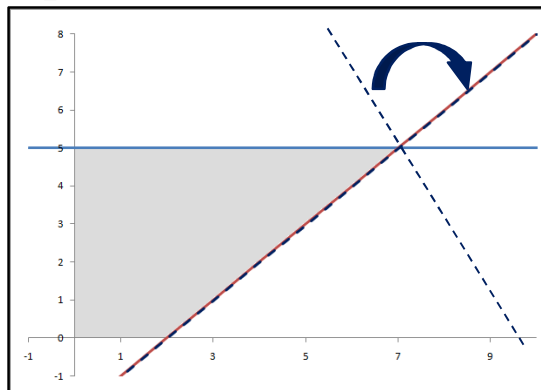
- Optimalidad:

$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \ 0) - (-2 \ c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2 - c_2 \ 2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \leq 2$$

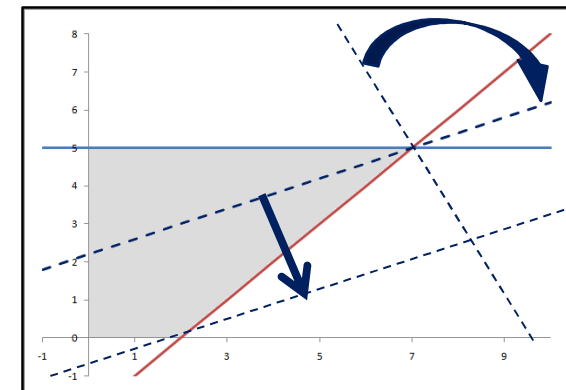
- Es decir, para cualquier $c_2 \leq 2$ la base se mantiene óptima



$c_2 = 0$ (base aún óptima)



$c_2 = 2$ (base aún óptima)



$c_2 = 3$ (la base óptima cambió)

Análisis de Sensibilidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 5

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.