INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxs: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

Control 2 IN3701

28 mayo 2009

Pregunta 1

La empresa de pigmentos LILLO & Co. debe decidir cada día qué pigmento producir en su única máquina, eligiendo dentro del conjunto de I pigmentos que comercializa.

Por razones técnicas puede producir como máximo un tipo de pigmento por día, en cada uno de los t días de su horizonte de planificación modelado por el conjunto T, ya que sólo se puede hacer un setup diariamente. El setup consiste en ajustar la máquina para producir un pigmento específico, si se sigue produciendo el mismo pigmento que el día anterior no es necesario realizar el setup nuevamente.

Además, debe mantener la máquina funcionando todos los días en el horizonte de planificación para evitar fallas de funcionamiento. Para efectos de modelamiento se puede considerar el caso en que no está produciendo ningún pigmento diciendo que está produciendo el producto ficticio 0. La capacidad de producción de la máquina es muy superior a la demanda estimada para cualquier pigmento, por lo que no es considerada una restricción relevante.

Para cambiar de pigmento se debe pagar un costo de setup c_{ij} que depende de los pigmentos i y j involucrados, ya que no es lo mismo cambiar entre pigmentos claros, oscuros, etc. Para efectos de modelamiento puede considerar que existe el costo $c_{ii} = 0 \ \forall i \in I$, y que en el período ficticio 0 del horizonte de evaluación la máquina estaba funcionando sin producir ningún pigmento.

La demanda diaria para el pigmento i en el día t del horizonte de planificación ha sido estimada por el departamento de marketing en d_{it}, y debe ser satisfecha durante el horizonte de planificación T, es decir, se permiten atrasos en la satisfacción de la demanda así como producir con anticipación algún pigmento en caso de ser necesario.

Los costos asociados a cada una de estas situaciones son b_i por unidad y día de atraso del pigmento i, costo definido por las penalizaciones por atrasos fijadas por contrato con los clientes más una estimación del costo asociado a la pérdida de confianza de parte de los clientes. Y un costo h_i por cada día y unidad de inventario almacenada del pigmento i ($b_i >> h_i \quad \forall i \in I$), costo definido por los costos de almacenamiento y de operación de la bodega.

Considere que el stock inicial y la demanda adeudada inicial de todos los pigmentos son nulos.Para efectos de modelamiento considere que la demanda diaria y atrasada de cada pigmento se satisface instantáneamente, y sin costo de distribución relevante, al final de cada día en función de la cantidad producida y almacenada hasta el momento.

Modele el problema de producción de la empresa como un problema de programación lineal mixto, donde se asegura la satisfacción de la demanda a lo largo del horizonte de planificación minimizando los costos de setup, y los costos por atrasos y por almacenamiento de productos en bodega.

Pregunta 2

Considere un problema de la forma:

$$\text{Min } c^t x$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$0 \leq x \leq u$$

donde A tiene filas l.i. y dimensiones $m \times n$. Suponga que $u_i > 0\ \forall i$

1. Sean $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ m columnas l.i. de A (las columnas "básicas"). Si partimos el conjunto de todos los $i \neq B(1), ..., B(m)$ en dos subconjuntos disjuntos L y U, y fijamos $x_j = 0\ \forall j \in L$ y $x_j = u_j\ \forall j \in U$. Y luego resolvemos la ecuación $Ax = b$ para las variables básicas $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$.
   a) (1 pto.) Demuestre que el vector resultante x es una solución básica.
   b) (1 pto.) Demuestre que x es una solución no degenerada si y sólo si $0 < x_i < u_i$, para todas las variables básicas x_i
2. Para esta parte y la siguiente, suponga que la solución básica construida en la parte 1. es factible. Calculamos el costo reducido $\bar{c}_i$ de las variables con la formulación vista en clases. Sea x_j una variable no básica tal que $x_j = 0$ y $\bar{c}_j < 0$. Como fue visto en clases, aumentamos el valor de x_j en θ, y ajustamos las variables básicas desde x_B a $x_B - \theta B^{-1} A_j$.
   a) (1 pto)Dado que queremos mantener la factibilidad, ¿Cuál es el mayor valor de θ que podemos tomar?
   b) (0.5 ptos.) ¿Cómo se determinan las nuevas variables básicas? Demuestre que la nueva solución generada es básica.
3. Sea x_j una variable no básica tal que $x_j = u_j$ y $\bar{c}_j > 0$. Reducimos el valor de x_j en θ, y ajustamos las variables básicas a $x_B + \theta B^{-1} A_j$.
   a) (1 pto)Dado que queremos mantener la factibilidad, ¿Cuál es el mayor valor de θ que podemos tomar?
   b) (0.5 ptos.) ¿Cómo se determinan las nuevas variables básicas? Demuestre que la nueva solución generada es básica.
4. Note que las condiciones de optimalidad en este caso son $\bar{c}_j \geq 0\ \forall j \in L$ y $\bar{c}_j \leq 0\ \forall j \in U$
   a) (0.5 ptos.) Demuestre que una solución x que cumple las condiciones anteriores no puede ser mejorada.
   b) (0.5 ptos.) Suponiendo que todas las soluciones básicas factibles son no degeneradas, demuestre que el valor de la función objetivo disminuye estrictamente en cada iteración y que el método termina.

Bonus (1 pto.)

Sea $P = \{x \in \Re^n \setminus Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacío, donde $A \in M^{m \times n}$.

Demuestre que:

$$x_j = 0 \quad \forall x \in P \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ y \in \Re^m \text{ tq } y^t A \geq 0,\ y^t b = 0 \text{ con } (y^t A)_j > 0$$

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxs: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

Control 2 IN3701

28 mayo 2009

Pregunta 1

Variables (1 pto.):

- x_{it}: Cantidad que se produce del pigmento i en el período t.
- s_{it}: Cantidad que se almacena del pigmento i al final del período t.
- r_{it}: Demanda adeudada del pigmento i al final del período t.
- y_{it}: Toma valor 1 si se produce el pigmento i en el período t. 0 en otro caso.
- w_{ijt}: Toma valor 1 si se cambia del pigmento i al pigmento j al comienzo del período t.

Restricciones:

1. (0.6 ptos.) Naturaleza de las variables:

$$y_{it}, w_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in I, t \in T$$
$$x_{it}, s_{it}, r_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T$$

2. (0.6 ptos.) Siempre mantener la máquina funcionando y sólo utilizar un pigmento por día

$$\sum_i y_{i,t} = 1 \quad \forall t \in T$$

3. (0.6 ptos.) El stock y deuda inicial es cero

$$s_{i0} = 0 \quad \forall i \in I$$

$$r_{i0} = 0 \quad \forall i \in I$$

4. (0.6 ptos.) Relación entre las variables

$$x_{it} \leq y_{it} \cdot M \quad \forall i \in I, t \in T \quad M = \sum_t d_{it}$$

$$x_{i0} = 0 \quad \forall i \in I$$

5. (0.6 ptos.) Definición de $w_{i,j,t}$

$$w_{ijt} \geq y_{it-1} + y_{jt} - 1 \quad \forall i, j \in I, i \neq j, t \in T \setminus \{0\}$$

$$y_{00} = 1$$

6. (0.5 ptos.) Conservación del flujo

$$s_{it-1} + r_{it} + x_{it} = d_{it} + r_{it-1} + s_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{0\}$$

7. (0.5 ptos.) Satisfacer de la demanda a lo largo del horizonte de planificación

$$r_{iT} = 0 \quad \forall i \in I$$

Función Objetivo (1 pto.)

$$Min \sum_{it} h_i \cdot s_{it} + \sum_{it} b_i \cdot r_{it} + \sum_{ijt} c_{ij} \cdot w_{ijt}$$

Pregunta 2

1. *a)* (1 pto.) Note que la ecuación $Ax = b$ se puede escribir como $A_B x_b + A_L x_l + A_U x_u = b$ donde $x_l = 0$ y $x_u = u$.

   Luego, se reduce a $A_B x_b = b - A_U u$ y como $rank(A_B) = m$ se concluye que la solución $x_b = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_U u = \widehat{b}$ queda únicamente determinada.

   Por lo tanto, el sistema de ecuaciones formado por las restricciones activas tiene solución única, por lo que por Teorema visto en clases se puede concluir que hay n restricciones activas l.i., lo que implica que x es una solución básica.

   b) (1 pto.) $\Leftarrow$ Si $0 < x_i < u_i \ \forall i \in B$ entonces no hay más restricciones activas que las n identificadas en la parte anterior, por lo que x es una solución no degenerada.

   $\Rightarrow$ Si x es una solución no degenerada, entonces por definición esta determinada sólo por n restricciones activas. Luego,ninguna de las restricciones no identificadas en la parte anterior puede ser activa, por lo que se cumple que $0 < x_i < u_i \ \forall i \in B$

2. *a)* (1 pto) Llamamos $\bar{A}_j = B^{-1} A_j$ y separamos los casos en que $\bar{a}_i > 0$ y $\bar{a}_i < 0$.

   Se define

   $\theta_1 = min_{\bar{a}_i > 0}\{\frac{\widehat{b}_i}{\bar{a}_i}\}$

   $\theta_2 = min_{\bar{a}_i < 0}\{\frac{\widehat{b}_i - u_i}{\bar{a}_i}\}$

   donde θ_2 se deduce de que para las variables con $\bar{a}_i < 0$ su valor aumenta al aumentar θ, por lo que para mantener la factibilidad tenemos que imponer que

   $x_i - \theta \bar{a}_i \leq u_i \ \forall i \in B$ y sabemos que $x_i = \widehat{b_i}$

   Nota de corrección: Como $\bar{a}_i < 0$ cambia la desigualdad.

   Asi, el máximo valor que puede tomar θ es

   $\theta^* = min\{\theta_1, \theta_2\}$

   b) (0.2 ptos.) Análogamente a las reglas vistas en clases, la variable x_j entra a la base, y la variable x_l que define el valor de θ^* sale de la base.

   (0.3 ptos.) Sea $\overline{B}$ la nueva matriz y B la base anterior. Para demostrar que $\overline{B}$ es base, tenemos que demostrar que sus columnas son l.i., esto es equivalente a demostrar que las columnas de $B^{-1}\overline{B}$ son l.i. Como $\overline{B}$ y B sólo difieren en las columnas j y l, tenemos que $(B^{-1}\overline{B})_i = e_i \ \forall i \neq l$ donde e_i es el vector unitario, por lo que claramente son l.i. entre si y su l-ésima componente es 0. Por otro lado, $(B^{-1}\overline{B})_j = \bar{A}_j$ y su l-ésimo componente es $\bar{a}_l \neq 0$ por la definición de x_l. Por lo tanto las columnas de $B^{-1}\overline{B}$ son l.i. y $\overline{B}$ es base.

3. *a)* (1 pto)De manera análoga al caso anterior se define

   $\theta_1 = min_{\bar{a}_i > 0}\{\frac{u_i - \widehat{b}_i}{\bar{a}_i}\}$

   $\theta_2 = min_{\bar{a}_i < 0}\{\frac{-\widehat{b}_i}{\bar{a}_i}\}$

   Y el máximo valor que puede tomar θ es

   $\theta^* = min\{\theta_1, \theta_2\}$

   b) (0.2 ptos.) Análogamente a las reglas vistas en clases, la variable x_j entra a la base, y la variable x_l que define el valor de θ^* sale de la base.

   (0.3 ptos.) La demostración anterior es válida.

4. *a)* (0.5 ptos.) Sea y una solución factible arbitraria, y sea $d = y - x$. Claramente $Ad = 0$, lo que se puede escribir como

   $A_B d_B + A_L d_L + A_U d_U = 0$. Como $rank(A_B) = m$ tenemos que
   $d_B = -A_B^{-1} A_L d_L - A_B^{-1} A_U d_U$
   Luego, $c'd = c_B^{'} d_B + c_U' d_U + c_U' d_U$
   $c'd = (c_L' - A_B^{-1} A_L) d_L + (c_U' - A_B^{-1} A_U) d_U = \bar{c}_L' d_L + \bar{c}_U' d_U$
   Para cualquier índice $i \in L$ y $j \in U$ tenemos que $x_i = 0$ y $x_j = u_j$, y como y es factible tenemos que $y_i \geq 0$ y $y_j \leq u_j$. Luego, $d_i \geq 0$ y $d_j \leq 0$ por lo que se cumple que $c_i d_i \geq 0$ $\forall i \in L$ y $c_j d_j \geq 0$ $\forall j \in U$.

   Concluimos que $c'd = c'(y - x) \geq 0$ y como y es una solución arbitraria, x es óptima.

   b) (0.5 ptos.) En cada iteración, el algoritmo se mueve una cantidad $\theta^* > 0$ (porque al ser todas las soluciones no degeneradas $\widehat{b}_i > 0$ $\forall i \in B$) a lo largo de una dirección d que satisface $c'd < 0$.

   Luego, el costo de cada solución básica visitada es estrictamente menor que la anterior, por lo que ninguna solución se puede visitar 2 veces.

   Como el número de soluciones básicas factibles es finito (una por cada base formada por m columnas l.i. y tengo un número finito de combinaciones posibles de m columnas sobre las n existentes), entonces el algoritmo debe terminar eventualmente con una solución básica óptima o identificando una dirección en la que se puede mover indefinidamente mejorando la función objetivo, por lo que su valor óptimo es no acotado.

Bonus

Considere los siguientes problemas primal y dual:

(P) Max $0x$ (D) Min $y^t b$

s.a. $Ax = b$ s.a. $y^t A \geq 0$

$x \geq 0$

Dem $\Rightarrow$

Como (P) es no vacío, tiene solución óptima finita $\Rightarrow$ (D) tiene solución óptima finita.

Sea $\bar{y}$ el óptimo de (D). Como $\bar{y}$ es factible, cumple $\bar{y}^t A \geq 0$. Y por dualidad fuerte se cumple que $\bar{y}^t b = 0$

Si $x_j = 0 \ \forall x \in P$, entonces la restricción dual asociada a este x_j no es activa para ningún y, por lo que se cumple que $(\bar{y}^t A)_j > 0$

Dem $\Leftarrow$

Si $(y^t A)_j > 0$, entonces por el Teorema de Holgura Complementaria se debe cumplir que $x_j = 0$