Guía de Problemas para el Control 2

Geometría

Problema 1

Demuestre que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo. Utilizando esto demuestre que todo poliedro es un conjunto convexo.

Sol.:

1. Sean $S_i, i = 1, \dots, n$ conjuntos convexos. Debemos probar que $S' = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es un conjunto convexo, o sea que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S'}, \forall \alpha \epsilon [0,1], \alpha x + (1-\alpha) y \epsilon S'$.

Tomemos un par de puntos $x, y \in S'$, como pertenece a la intersección de conjuntos, pertenece a cada S_i. Luego, como S_i es un conjunto convexo cumple con:

$x, y \in S_i \subseteq S', \forall \alpha \epsilon [0,1], \alpha x + (1-\alpha) y \epsilon S_i \subseteq S'$.

Por lo tanto, $S' = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es un conjunto convexo.

2. Para probar que todo poliedro es un conjunto convexo tomemos un escalar cualquiera **b**, y un vector **a.**

Consideremos el conjunto $A = \{x| \ a'x \geq b\}$. Probaremos que este conjunto es convexo:

Sea $x, y \in A$, y sea $\lambda \epsilon [0,1]$. Luego se tiene que:

$a'(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda a'x + (1-\lambda) a'y \geq \lambda b + (1-\lambda) b = b$

Entonces $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$, luego A es convexo. Como un poliedro se puede construir como la intersección finita de conjuntos de la forma de A, entonces se concluye que todo poliedro es un conjunto convexo.

Problema 2

Sea P el poliedro descrito en por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \boldsymbol{-2x_1 + x_2 \leq 0} \\ \boldsymbol{x_2 \leq 5} \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 10} \end{aligned}$$

1. Escriba P en su forma estándar.

2. Dé un método para encontrar soluciones básicas, y utilícelo para encontrar estas. ¿Son todos los puntos encontrados vértices y puntos extremos? ¿Hay alguna base degenerada?

Solución:

1. Un poliedro en forma estándar, es un poliedro de la forma, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ , x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{mxn}, b \in \mathbb{R}^m\}$.

Lo importante de los poliedros en forma estándar, es que todo poliedro puede ser representado por un poliedro de estas características a través de las variables de holgura y relaciones de no negatividad.

En este caso, el poliedro de forma estándar quedaría de la forma:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$
$$x_2 + x_5 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_6 = 10$$
$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

O equivalentemente,

$$(x_1' - x_1'') - (x_2' - x_2'') - x_3 = 0$$
$$-2\,(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') + x_4 = 0$$
$$(x_2' - x_2'') + x_5 = 5$$
$$2\,(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') + x_6 = 10$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

A=

x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6
1	-1	-1	+1	-1	0	0	0
-2	+2	+1	-1	0	1	0	0
0	0	1	-1	0	0	1	0
2	-2	1	-1	0	0	0	1

$$x = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{vmatrix}$$

2. Un procedimiento para construir soluciones básicas:

1. Elija *m* columnas linealmente independientes $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$
2. Sea $x_i = 0$, para todo $\mathrm{i} \neq \mathrm{B}(1), \dots, \mathrm{B}(\mathrm{m})$.
3. Resuelva el sistema Ax=b para las incógnitas $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$

Por ejemplo, en este caso tenemos que m=4. Luego elijamos

$A_{B(1)} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $A_{B(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $A_{B(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $A_{B(4)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Correspondientes a las variables $x_{3,}x_4, x_5$ y x_6

Luego hacemos $x_1{}'$=0, $x_1{}''$=0 $x_2{}'$=0 $x_2{}''$=0.

Ahora falta resolver el sistema $A_B x_B = b$. Claramente la solución de este problema es:

$$x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Como $x_B \geq 0$ entonces es una solución básica factible, y por ende es un vértice y un punto extremo. Notar que si algún $\mathrm{x_i} < 0, i = \mathrm{B}(1), \ldots, \mathrm{B(m)}$, entonces la solución básica encontrada no es factible, y por ende no es vértice, ni punto extremo, puesto que no pertenece al poliedro.

Además podemos ver que tenemos una base degenerada puesto que tenemos que las variables básicas x_3 y x_4 son iguales a cero. (n=8, m = 4, n – m = 4, y hay 6 variables iguales a cero).

Problema 3

Considere el problema de forma estándar $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Suponga que la matriz $A \in R^{mxn}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones establezca si es verdadera o es falsa. Si es verdadera, demuéstrela, si es falsa de un contraejemplo:

a. Si n=m+1, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.
b. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.
c. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no cero.
d. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.
e. Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.

Solución:

a. Verdadero:

Como P está en forma estándar, tiene al menos un punto extremo v_0. Si no existe otro vértice, existe solo un vértice y el resultado se cumple.

Supongamos que existe otro punto extremo v_i. Definamos $d_i = v_i - v_0$, el cual satisface con $Ad_i = 0$. $(Ad_i = A(v_i - v_0) = Av_i - Av_0 = b - b = 0)$.

Pero la dimensión de $\{d \mid Ad = 0\} = n - m = m + 1 - m = 1$, por lo que existe un $d_0 \neq 0$, tal que $d_i = \alpha_i d_0$ para cualquier d_i.

Sea $\alpha_\infty = \max\{\alpha_i \mid \ v_i \; es\; punto\; extremo\}$, y sea v_∞ donde se alcanza el máximo (El cual existe pues el conjunto $\{\ \alpha_i | v_i \; es\; punto\; extremo\}$ es no vacio, y es acotado puesto que el número de puntos extremos es acotado). Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que v_i es una combinación lineal convexa de v_0 y v_∞. Luego $\alpha_i = \alpha_\infty \quad \forall i$, por lo que el conjunto de puntos extremos tiene cardinalidad 2 ($v_0 \; y \; v_\infty$)

b. Falso:

Basta con tomar $P = \{x \in R^n\}$ y minimizar $z = -e_i$ donde e_i es el i- ésimo vector canónico. En este caso los óptimos es el conjunto {x ∈ R^n| $x_i = 0$}, que es no acotado.

c. Falso

Basta considerar:

$$\min -x_1 - \ x_2 \quad (\max x_1 + x_2)$$
$$x_1 \ + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El punto (½, ½) es el óptimo y posee más de una componente no cero.

d. Verdadero

Si existe más de una solución entonces existen a lo menos 2 soluciones, que llamaremos $x_1 \; y \; x_2$. Luego por convexidad, todas las combinaciones convexas son soluciones, es decir $\{x \mid x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda \ \in [0,1]\}$ también son soluciones.

Luego,

$$|\{x : x \; es\; solución\}| \geq |\{\lambda : \lambda \ \in [0,1]\}|$$

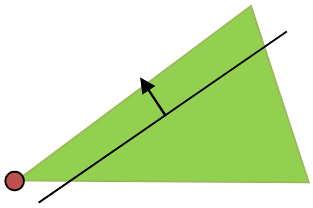
Por ende el conjunto de soluciones es no numerable.

e. Falso

Considere $P = \{x \in R^n, x_i \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, n\}$ y minimizar $z = -e_i$ donde e_i es el i- ésimo vector canónico. P posee solo un punto extremo ($\vec{x} = \vec{0}$), y el conjunto de soluciones óptimas posee más de dos puntos.

Para que quede más claro, para poder concluir que si hay varios óptimos, no necesariamente hay más de dos soluciones básicas factibles.

Supongamos que la región es infinita hacia la derecha, y que sólo existe un vértice, si la función objetivo es paralela a uno de los lados habrán infinitos óptimos, pero sólo un vértice es decir sola una sola solución factible.



Problema 4

Sabemos que cada problema de programación lineal puede ser convertido a su problema equivalente en la forma estándar. También sabemos que un poliedro no vacio en su forma estándar tiene al menos un punto extremo. Entonces podemos concluir que cualquier poliedro no vacio tiene al menos un punto extremo. Explique por qué este razonamiento es incorrecto.

Solución:

Este razonamiento falla porque al pasar de un poliedro cualquiera a un poliedro en su forma estándar, uno introduce variables, que son las que provocan la existencia de estos puntos extremos.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

Claramente este poliedro no tiene ningún punto extremo.

Entonces el poliedro equivalente en forma estándar sería introduciendo una variable de holgura, y dos variable para x1 y x2 que son irrestrictas:

$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$

Luego,

$$x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' + x_3 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

Claramente (0, 0, 0, 0, 3) es un punto extremo, pero el original no.

SIMPLEX

Problema 1

Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema? ¿Por qué?

b) Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?

c) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?

d) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.

e) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.

f) ¿Cuando una solución es degenerada?

g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

Solución:

Notar que la deducción que haremos acá es similar a la que hacen en el Bertsimas, sin embargo no ocupamos la misma terminología, es tarea de ustedes ver que ambas son equivalentes:

Tenemos el problema:

$$(P) \min c^t x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Si dividimos la matriz A en dos matrices, para construir nuestras soluciones básicas:

$$A = (A_B|A_n)$$

Donde A_B es una matriz cuadrada de dimensión m, y A_n es una matriz de mx(n-m), entonces podemos transformar nuestro problema a:

$$(P) \min c^t \binom{x_B}{x_N}$$
$$(A_B|A_n)\binom{x_B}{x_N} = b$$
$$x \geq 0$$

Que es equivalente a:

$$
\begin{gathered}
(P) \min {c_B}^t\, x_B + {c_N}^t x_N \\
A_B x_B + A_N x_N = b \\
x \geq 0
\end{gathered}
$$

Como A_B tiene columnas l.i., es invertible, entonces:

$$
\begin{gathered}
x_B + A_B^{-1} A_N x_N = B^{-1} b \\
x_B = {A_B}^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N
\end{gathered}
$$

Y por ende la función objetivo se puede escribir como:

$$
\begin{gathered}
\min z = {c_B}^t \left({A_B}^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \right) + c_N^t x_N \\
\min z = {c_B}^t {A_B}^{-1} b + (c_N^t - {c_B}^t A_B^{-1} A_N) x_N
\end{gathered}
$$

Si se fijan una vez elegida una base, la f. o. queda solo en función de lo variables no básicas.

Además, en los costos reducidos aparece la solución del problema dual de la base asociada.

Entonces el problema asociado a la base B de columnas de A queda dado por:

$$
\begin{gathered}
\min z = {c_B}^t {A_B}^{-1} b + (c_N^t - {c_B}^t A_B^{-1} A_N) x_N \\
x_B = {A_B}^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\
x_B, x_N \geq 0
\end{gathered}
$$

Luego, la solución básica asociada a esta base está dada por $x_B = A_B^{-1} b$ y $x_N = 0$. Ahora estamos en condiciones de resolver las preguntas:

a) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema? ¿Por qué?

Si definimos $c_N^t - {c_B}^t A_B^{-1} A_N$, como los costos reducidos asociados a la base, el vértice representado por esta base será óptimo si todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero.

Esto se debe a que si los costos reducidos son menores que cero la función objetivo puede disminuir su valor si x_N crece, y por lo mismo, si sus costos reducidos son mayores que cero, si x_N deja de valer 0, entonces la función objetivo aumenta su valor. Luego el vértice es óptimo si los costos de las variables reducidas son mayores que cero.

b) Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?

Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido igual a cero y tiene rango factible para crecer, entonces el problema admite óptimos alternativos.

Esta variable puede crecer hasta que una variable básica se haga cero. Esto se da porque:

$$x_B = {A_B}^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$$

Si $\bar{b} = {A_B}^{-1}b$ y $\overline{A_N} = A_B^{-1}A_N$ entonces:

$$x_B = \bar{b} - \overline{A_N}\, x_N$$
$$x_B = \bar{b} - \bar{A}_{m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{A}_n x_n$$

Supongamos que x_s es la variable que tiene costo reducido igual a cero, si ella aumenta o disminuye su valor, la función objetivo no cambia. Como en el óptimo todas las demás variables no básicas valen 0, entonces:

$$x_B = \bar{b} - \overline{A_s}\, x_s = \bar{b} + d\, x_s$$

En este caso definiremos, la **dirección factible** $d = -\overline{A_s} = -A_B^{-1}A_{N_S}$, donde A_{N_s} es la columna de la matriz A_N asociada a la variable x_s.

Esta igualdad de vectores se puede separar coordenada a coordenada,

$$x_B = \bar{b}_i + d_i\, x_s \qquad i = 1, \ldots m \quad x_i \; variable\; básica$$

Entonces si x_s puede crecer de tal forma que $x_i > 0$, entonces el máximo valor que puede tomar x_s es:

$$\min_{d_i > 0}\{\frac{\bar{b}_i}{d_i}\}$$

c) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?

Si la variable que entra a la base es x_s (pues tiene un costo reducido menor que cero)

$$x_B = \bar{b}_i + d_i\, x_s \qquad i = 1, \ldots m \quad x_i \; variable\; básica$$

Vemos que si $d_i > 0$para todo i= 1,..., m entonces $x_s$puede crecer indefinidamente antes que se anule alguna variable básica. Luego el problema tiene óptimo $z = -\infty$.

d) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.

El algoritmo SIMPLEX se asegura de no salir del poliedro factible al efectuar de manera correcta el criterio de salida de la base.

$$x_B = \bar{b}_i + d_i\, x_s$$

Si para algún i = 1,…, m, $d_i < 0$, entonces cuando x_s crece, x_i decrece. Notar que el valor mínimo que puede tener x_i es cero, para que el problema siga siendo factible. Entonces el valor máximo que puede tomar x_s es hasta que la primera variable básica de la base antigua se haga cero, que es precisamente la que sale de la base.

e) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.

El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0. Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo, al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldría de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

f) ¿Cuándo una solución se dice degenerada?

Cuando existe a lo menos una variable básica igual a cero.

g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

Si, si estamos por primera vez en una solución básica factible degenerada no óptima algún costo reducido será menor que cero, sin embargo, al aplicar los criterios de entrada/salida a la base será posible obtener otra base representativa del mismo vértice (porque es degenerado), y en ese caso el valor de la función objetivo no cambiará (ya que se evalúa en el mismo punto).

Problema 2

Considere el siguiente problema:

$$\begin{gathered}\mathbf{max} -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} - \mathbf{10}\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{s.a.}\ \boldsymbol{x_2} + \mathbf{4}\boldsymbol{x_3} = \mathbf{2}\\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} - \mathbf{6}\boldsymbol{x_3} = \mathbf{2}\\ \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \geq \mathbf{0}\end{gathered}$$

Encuentre una base inicial factible usando fase 1 de simplex.

Solución:

Lo primero que se de hacer es escribir el problema en forma estándar. Notemos que, para efectos de este problema, no es necesario agregar variables de holgura, pues las restricciones están con igualdad:

$$\begin{gathered}min\, x_1 + x_2 + 10x_3\\ s.a. x_2 + 4x_3 = 2\\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{gathered}$$

Se puede ver fácilmente que el origen no es una solución básica factible (basta reemplazar (0,0,0) en las restricciones), por lo que debemos hacer fase 1 para encontrar una base factible inicial, que es justamente lo que no piden en el enunciado.

Escribimos entonces el problema en fase 1, agregando variables artificiales:

$$\min y_4 + y_5$$
$$s.a. x_2 + 4x_3 + y_4 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, y_4, y_5 \geq 0$$

El problema de fase 1 lo único que hace es agregar variables artificiales a las restricciones (manteniendo las variables de holgura si las hubiera, en este caso no hay). La gracia está en que, si agregamos una variable a cada restricción, podemos usar la identidad como base factible inicial. Fíjense que, además, cambia la función objetivo. Tenemos que minimizar la suma de todas las variables que agregamos. La idea es que, usando simplex resolvamos este problema y si TODAS las variables artificiales en el óptimo dan cero, obtenemos una base inicial factible para el problema original (es necesario que TODAS las variables artificiales sean cero, pues así es como "no haber agregado nada"). Por eso, exigiremos que la función objetivo del problema de fase 1 sea cero, sino alguna de las variables no es cero y el problema original está mal construido, o mejor dicho, es infactible.

Notar que se puede hacer fase 1 de forma un poco más inteligente. Podríamos haber agregado sólo una variable artificial a la segunda restricción (y_5), y podríamos tener de todas formas la identidad si usamos las columnas asociadas a x_2 e y_5. Eso también es válido (y de hecho más fácil) para calcular fase 1.

Partiendo del origen del nuevo problema, calculamos:

$$B = \{4,5\} \quad N = \{1,2,3\}$$
$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}{}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\bar{c_r} = (0,0,0) - (1,1,) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = (2 \ -1 \ \ 2)$$

Hay un costo reducido negativo, por lo que entra a la base su variable asociada (x_2). Usamos el criterio de salida para ver que variable sale de la base:

$$min \{\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\}$$

Como ambos valores son iguales, podemos elegir arbitrariamente qué variable sale. Elegimos arbitrariamente y_4.

Iteramos con la nueva base. Calculamos:

$$B = \{2,5\} \quad N = \{1,4,3\}$$
$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}{}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo:

$$\bar{c_r} = (0,1,0) - (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} = (2 \quad 2 \quad 10) \geq 0$$

Como todos los costos reducidos son positivos, la base actual es óptima. Las variables básicas son $x_2 = 2, y_5 = 0$ y las no básicas $x_1 = x_3 = y_4 = 0$.

Fase 1 debe cumplir que su función objetivo al encontrar una base sea cero. En este caso se cumple, por lo que el problema original está bien definido, o sea, es infactible. Notar que hay una variable artificial en la base encontrada, por lo que será necesario agregar esta variable al problema original, usar la base y resolver fase 2.

En otras palabras, el problema de fase 2 queda:

$$\min x_1 + x_2 + 10x_3 + My_5$$
$$s.a. x_2 + 4x_3 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, y_5 \geq 0$$

Y se resuelve usando fase 2 de Simplex, es decir, hacemos simplex partiendo de la base encontrada en fase 1, B={2,5}. Notar que si no hubiera quedado una variable artificial en la base no hubiera sido necesario agregarla en el problema de fase 2. Además, esta variable se agrega con el coeficiente $M \gg 1$ en la función objetivo, para que tenga un costo muy alto y solo salga de la base, y nunca entre.

Solo plantearemos la primera iteración de fase 2, queda propuesto resolverlo:

Calculamos:

$B = \{2,5\} \quad N = \{1,3\} \ \ (y_4 \ ya\ no\ existe)$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}{}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$c_r = (1 \quad 10) - (1 \quad M)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = (1 - 4M, 10 + 2 + 10M)$$

Como M es muy grande el único costo reducido negativa es entonces el asociado a la variable x_1. La variable x_1 entra a la base.

Para ver que variable sale, calculamos:

$$\min_{a_{is}>0}\{\frac{b}{a_{is}}\} = \{\frac{0}{4}\}$$

Sale la variable y_5. Ojo que no pusimos el término asociado a la variable x_2 pues este era 2/0 y está explicito que $a_{is} > 0$, lo que para esa variable no se cumple.

La nueva base es:

$$B = \{2,1\} \quad N = \{5,3]$$

Dualidad

Problema 1

Considere el problema de programación lineal de minimizar $c'x$ sujeto a $Ax = b, x \geq 0$. Sea x* la solución óptima, asuma que existe, y sea p^* la solución del problema dual.

a) Sea x” una solución óptima del primal, cuando c es reemplazado por algún c”. Muestre que $(c'' - c)'(x'' - x*) \leq 0$.

Solución:

a) Primero tenemos que notar que si cambiamos el vector de costo, la región factible de ambos problemas será la misma:

$$\begin{aligned} &P1 \quad min\ c\,x \\ &s.a \quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &P2 \quad min\ c''\,x \\ &s.a \quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Tienen la misma región factible, luego x* y x” son soluciones factibles de ambos problemas, puesto que son soluciones óptimas.

Luego:

$$(c'' - c)'(x'' - x*) = c''x'' - cx'' - c''x* + cx* \quad (*)$$

Pero:

$c''x'' = y''\,b$ Por dualidad fuerte
$c''x^* \geq y''\,b$ Por dualidad débil

$cx^* = y^*\,b$ Por dualidad fuerte
$cx'' \geq y^*\,b$ Por dualidad débil

Luego (*):

$$c''x'' - cx'' - c''x^* + cx^* \leq y''b - y''b + y^*b - y^*b = 0$$

b) Sea el vector de costo fijo e igual a c, pero suponga que ahora cambiamos b por b”, y sea x la correspondiente solución del primal. Muestre que $p^{*\prime}(b'' - b) \leq c'(x'' - x*)$.

Solución:

Nuevamente tenemos dos problemas:

$$\begin{aligned} P1 \ \ min \ \ cx \\ s.a \ \ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P2 \ \ min \ \ cx \\ s.a \ \ Ax = b'' \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Notar que estos dos problemas no tienen la misma región factible, así que la metodología anterior no nos sirve.

$$\begin{aligned} c(x'' - x*) &= cx'' - cx* \\ &= cx'' - y*b \qquad \text{Por dualidad fuerte. (**)} \end{aligned}$$

Luego nos basta demostrar que,

$$c(x'' - x*) = cx'' - y*b \geq y*b'' - y*b = y*(b'' - b)$$

Por otro lado sabemos que $cx'' = y''b''$, con y” solución del problema dual de P2. Notar que al existir x” este existe.

Veamos los problemas duales:

$$\begin{aligned} D1 \quad máx \ \ yb \\ s.a \ \ A'y \leq c \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D2 \ \ máx \ \ yb'' \\ s.a \ \ A'y \leq c \end{aligned}$$

Estos problemas tienen la misma región factible, entonces:

y* es solución óptima de D1, luego, en particular es solución básica factible de D1, entonces al tener la misma región factible , es solución factible de D2, por lo tanto $y''b'' \geq y*b''$.

Luego por (**):

$$c(x'' - x*) = cx'' - y*b \geq y*b'' - y*b = y*(b'' - b)$$

Problema 2

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacio y sea m la dimensión del vector b. llamamos x_j variable nula si x_j para todo $x \in P$.

a) Suponga que existe algún $y \in \mathbb{R}^m$ para el cual $y^t A \geq 0$, $y^t b = 0$ y tal que la j-ésima componente de$y^t A$ es positiva. Pruebe que x_j es una variable nula.

Solución:

El enunciado sugiere los siguientes problemas (P) y (D)

$$\begin{array}{lcl} (P) Max\ 0x & \qquad & (D)\ Min\ y^t\ b \\ s.a\ Ax = b & & s.a\ \ y^t\ A\ >= 0 \\ x \geq 0 & & \end{array}$$

Si $(y^t A)_j > 0$ en (D), entonces x_j (la variable en (P) asociada a la restricción j) es cero. Esto es directo del teorema de holgura complementaria.

(Cada variable dual está asociada a una restricción del primal, la explicación económica de una variable dual óptimas y_i es: “cuanto mejoro la función objetivo del problema primal si aumento en 1 unidad a b_i ”, por lo tanto, si la restricción i no es activa, no puedo modificar el valor de la función objetivo cambiando ¶├ porque el punto óptimo no lo obtengo a través de esta restricción, en este caso la variable dual asociada a esa restricción será = 0, en cambio, si esa restricción es activa, si puedo alterar el valor de la función objetivo cambiando b_i ya que al mover esta restricción el punto óptimo cambia, en este caso la variable dual será ≠ 0.)

Demostración:

$$Ax = b \qquad y^t \cdot$$
$$y^t A\ x = y^t b = 0$$
$$(y^t A)_j\ x_j = 0$$

Pero $(y^t A)_j > 0$ y $x \geq 0$, luego $x_j = 0$.

b) Pruebe la inversa de a): Si $x_j = 0$es una variable nula, entonces existe un $y \in \mathbb{R}^m$ que cumple con las propiedades de la parte a.

Solución:

Como (P) es no vacío, tiene óptimo finito, entonces (D) tiene un óptimo finito, llamemos $\bar{y}$ al óptimo de (D).

-Es directo que $\bar{y}^t A \geq 0$ ya que $\bar{y}$ es factible.
-Por dualidad fuerte tenemos que $\bar{y}^t b = 0$.

Si $x_j = 0$ en (P), entonces la restricción asociada a este x_j en el dual no es activa, lo cual se escribe como$(y^t A)_j > 0$.

c) Si x_j no es una variable nula, entonces por definición, existe algún $\overline{x} \in P$ para el cual $x_i > 0$. Use los resultados de a) y b) para probar que existe $x \in P$ y $y \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\boldsymbol{y^t A \geq 0}, \qquad \boldsymbol{y^t b = 0}, \;\; \boldsymbol{x + A^t y > 0}$$

Solución:

Si tomamos los problemas (P) y (D) $y^t A \geq 0, y^t b = 0$ son directas.

Para verificar que existe un x tal que , $x + A^t y > 0$ en cada componente, analizaremos los siguientes casos para las componentes de x:

- Si x_i es una variable nula:

Por parte b) $(y^t A)_i > 0 \rightarrow (\mathrm{x} + y^t A)_i > 0$.

- Si x_i es una variable no nula:

(Se podría decir que si xj > 0, se cumple de inmediato que $(\mathrm{x} + y^t A)_i > 0$, ya que $y^t A \geq 0$, pero este razonamiento es incorrecto ya que ser una variable no nula, no asegura que la componente j-ésima siempre sea positiva, eventualmente podría ser cero y en tal caso no se cumpliría la desigualdad estricta.)

Si tenemos n variables no nulas, por enunciado sabemos que para cada variable nula j existe un $\bar{x} \in P$ tal que su componente j-ésima es positiva.

Elegimos $\hat{x}$, como una combinación convexa de estos n $\bar{x}$'s, $\hat{x} = \sum \frac{\overline{x_J}}{n}$.

De la forma en que está construido $\hat{x}$ es positivo en cada componente no nula y al ser una combinación convexa de puntos que de P, $\hat{x}$ pertenece al conjunto, por lo tanto $\hat{x}$ con $(\mathrm{x} + y^t A)_i > 0$ y existe.

Problema 3

1. ¿Qué debe ocurrir en un problema primal para que los valores de las variables duales correspondan al valor marginal de las restricciones (para perturbaciones pequeñas)?. Dé un ejemplo en R2 donde esto se cumpla.

Esto se cumple siempre que el problema no sea degenerado. Cualquier ejemplo bajo esta condición sirve, por ejemplo:

El primal:

$$Max\ z = 3x_1 + x_2$$

$$s.a. 4x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Y su dual:

$$\min w = 20y_1 + 2y_2$$
$$s.a\ 4y_1 + y_2 \geq 3$$
$$5y_1 - y_2 \geq 1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

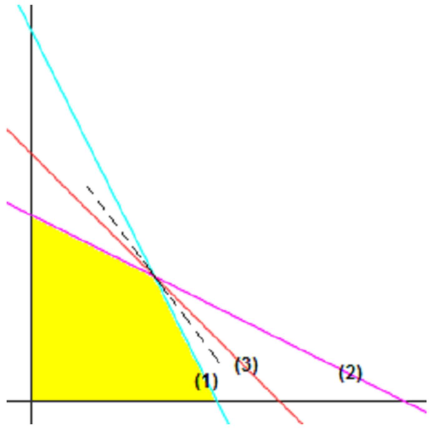
2. ¿Qué debe ocurrir para que el valor dual asociado a una restricción sea no nulo, pero que al aumentar el lado derecho de la misma (estrictamente) la solución óptima no cambie? (es decir, la variable dual no es el beneficio marginal de aumentar esa restricción).

Este es el caso complementario a la parte 1). Se puede dar esta situación si el problema primal es degenerado en el óptimo. En tal caso, se tiene un número de restricciones en el punto que es mayor al número de dimensiones del problema, por lo que el punto está sobre determinado. Si se incrementa el valor del lado derecho de una de las restricciones activas en el óptimo, el valor de la función objetivo no cambiará (pues el óptimo es el mismo que antes, el punto era degenerado), por lo que en este caso la variable dual no representa el beneficio marginal de aumentar la capacidad de la restricción. OJO: Esto no ocurre con TODAS las restricciones activas, sino que sólo con algunas. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

$$\max z = \frac{3}{2}x_1 + x_2$$

$$s.a\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 \leq \frac{8}{3} \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El gráfico queda:



El punto óptimo (4/3,4/3) es degenerado, y se ve claramente que si incrementamos el lado derecho de las restricciones (2) o (3), el óptimo no cambiará (para verlo, imaginen que trasladan una de esas curvas hacia la derecha, que es equivalente a incrementar el lado derecho). Sin embargo, si incremento el lado derecho de la restricción (1), el óptimo sí cambiará.

3. Dé un ejemplo de un problema donde el valor óptimo primal sea menor estricto que el valor óptimo dual.

Solución:

Aquí sirve cualquier ejemplo donde tanto el primal como el dual son infactibles:

El primal

$$\begin{gathered} \max x_1 + 2x_2 \\ s.a.\, x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1, x_2 \ irrestricto \end{gathered}$$

Y su dual

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 \\ &s.a.\ \ x_1 + x_2 = 3 \\ &2x_1 + 2x_2 = 4 \\ &x_1, x_2 \ irrestricto \end{aligned}$$

Ambos problemas son infactibles. Se tiene que $-\infty = Z_p < Z_D = +\infty$

Análisis de Sensibilidad

Problema 1 (Análisis de Sensibilidad)

Considere el problema (P):

$$\begin{gathered}\max c_1x_1 + x_2\\ x_1 + x_2 \leq 5\\ 3x_1 - x_2 \leq b_2\\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

Encuentre los rangos en que pueden variar c_1 y b_2 para que el óptimo se encuentre en la intersección de ambas restricciones.

Solución:

Es importante recordar que:

Escribiendo (P) en forma estándar:

$$\begin{gathered}\min -c_1x_1 + -x_2\\ x_1 + x_2 + x_3 = 5\\ 3x_1 - x_2 + x_4 = b_2\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{gathered}$$

Si el óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones, entonces las variables de holgura son nulas, y por lo tanto, no están en la base, luego: $x_B = (x_1, x_2)$ y $x_N = (x_3, x_4)$.

Entonces:

$$A_B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = A^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ b_2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 + b_2\\ 15 - b_2\end{pmatrix} \geq 0$$

Luego: $b_2 \leq 15$ y $b_2 \geq -5$ para mantener la factibilidad.

Por otra parte, los costos reducidos vienen dados por:

$$c_N^t - c_B{}^t A_B^{-1} A_N = (0,0) - (-c_1, -1)\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Luego $c_1 \geq -3$ y $c_1 \geq 1$ para mantener la optimalidad.

Por lo tanto, $b_2 \in [-5,15]$ y $c_1 \in [1, +\infty)$.