Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti
Coordinador: N. Padilla
Aux: V. Bucarey, N. Devia, A. Torrico, C. Thraves

Pauta Control 1

Problema 1

Variables: (0,2 puntos c/u, 1,2 puntos en total)

- $\alpha_{it} = 1$ si almaceno producto i entre t y $t+1$, 0 si no.
- $z_t = 1$ si expando bodega en periodo t, 0 si no.
- x_{ijt} cantidad de producto i comprada a proveedor j en periodo t.
- y_{it} cantidad de producto i almacenada entre t y $t+1$.
- w_t capacidad expandida de la bodega en periodo t.
- cap_t capacidad efectiva al final del periodo t.

Restricciones: (0,4 puntos c/u, 4 puntos en total)

- Naturaleza de las Variables:
  $\alpha_{it}, z_t \in \{0,1\}$, $x_{ijt}, y_{it} \in \mathbb{Z}_+$, $w_t, cap_t \in \mathbb{R}_+$.
- Conservación de Flujo:
  $y_{i,t+1} = y_{it} + \sum\limits_j x_{ijt} - d_{it}$, $\forall i, t$.
- Satisfacer Demanda:
  $y_{i,t-1} \geq d_{it}$, $\forall i, t$.
- Respetar Capacidad:
  $\sum\limits_i v_i y_{it} \leq cap_t$, $\forall t$.
- Definir la Capacidad Efectiva:
  $cap_t = CAP + \sum\limits_{s=0}^{t} w_s$, $\forall t$.
- Relación $w - z$:
  $w_t \leq M_1 z_t$, $\forall t$.
- Relación $y - \alpha$:
  $y_{it} \leq M_2 \alpha_{it}$, $\forall i, t$.
- Respetar Presupuesto de Compra:
  $\sum\limits_{i,j} x_{ijt} CP_{ij} \leq PPTO_t$, $\forall t$.
- Productos No Compatibles:
  $\alpha_{it} + \alpha_{kt} \leq 1$, $\forall t \in T, i, k \in NC$.
- Cantidades Iniciales:
  $y_{i0} = I_i^o$, $\forall i$.

Función Objetivo: (0,8 puntos)

$$\max \sum_{i,t} y_{it} U_{it} - \sum_t (z_t CF_t + w_t CV_t)$$

Problema 2

(a) Variables: (0,8 puntos)

- $x_i = 1$ si p_i es verdadera, $x_i = 0$ si no.
- $y_j = 1$ si S_j es verdadera, $y_j = 0$ si no.

Se pueden definir los parámetros (no es necesario, se pueden utilizar también frases del tipo "...si q_{kj} es igual a p_i..."):

- $a_{ijk} = 1$ si q_{kj} es igual a p_i, $a_{ijk} = 0$ si no ($k = 1, 2, 3$).
- $b_{ijk} = 1$ si q_{kj} es igual a no p_i, $b_{ijk} = 0$ si no ($k = 1, 2, 3$).

Restricciones: (1,5 punto)

- Naturaleza de las Variables:
  $x_i, y_j \in \{0, 1\}$.
- Relacionar Verdadero S_j:
  $y_j \geq x_i \ \forall i, j$ tal que q_{1j}, q_{2j} o q_{3j} es igual a p_i.
  $y_j \geq 1 - x_i \ \forall i, j$ tal que q_{1j}, q_{2j} o q_{3j} es igual a $\bar{p_i}$.
  Lo anterior también está bueno si se escribe en función de los parámetros a y b.
- Relacionar Falso S_j:
  $y_j \leq q_{1j} + q_{2j} + q_{3j} \ \forall j$ con q_{ij} igual a x_i o $1 - x_i$ según corresponda.
  O en forma alternativa
  $y_j \leq (\sum\limits_i a_{ij1}x_i + \sum\limits_i b_{ij1}(1 - x_i)) + (\sum\limits_i a_{ij2}x_i + \sum\limits_i b_{ij2}(1 - x_i)) + (\sum\limits_i a_{ij3}x_i + \sum\limits_i b_{ij3}(1 - x_i)) \ \forall j.$

Función Objetivo: (0,7 puntos)

$$\text{mín} \sum_{j=1}^{m} y_j$$

(b) Restricciones:

- Mantener las mismas variables y restricciones que en la parte anterior (1 punto).
- A lo mismo agregar la siguiente restricción: (1 punto)
  $\sum_{j=1}^{m} y_j \geq m - k$

Función Objetivo: (1 punto)

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Problema 3

a) **Forma I**
Primero demostraremos que x es vértice. Sea un punto $x \in P$ con coordenadas enteras en $\{0, 1\}$, definamos $I_0 = \{i | x_i = 0\}$ e $I_1 = \{i | x_i = 1\}$. Luego tomemos $c \in R^n$, tal que $c_i = 1$ si $i \in I_0$ y $c_i = -1$ si $i \in I_1$. Entonces $c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i \in I_0} 1 \cdot 0 + \sum_{i \in I_1} -1 \cdot 1 = -|I_1|$. Tomemos un $y \in P \setminus \{x\}$, luego

$$c^T y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \underbrace{\sum_{i \in I_0} 1 \cdot y_i}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i \in I_1} -1 \cdot y_i}_{\geq -|I_1|} > -|I_1|$$

, bien dado que $y \neq x$, entonces la desigualdad es estricta. Así concluimos que x es un vértice de P. Finalmente, por teorema visto en clases, $x \in P$ es vértice sí y solo sí x es un punto extremo de P, luego se tiene que x es un punto extremo de P. (3 puntos)

Forma II a)
Veamos que no es posible encontrar otros dos puntos $y, z \in P \setminus \{x\}$ tal que $x = (z+y)/2$. Sea $x \in P$ con coordenadas enteras en $\{0,1\}$. Entonces si tuviéramos 2 puntos $y, z \in P \setminus \{x\}$ tales que $x = (z+y)/2$, entonces al menos deben diferir en una componente, supongamos la *i-ésima*, luego se tendrá que $x_i = (y_i + z_i)/2$, y podemos decir que $y_i = x_i - \varepsilon$ y $z_i = x_i + \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$). Pero bien si $x_i = 0$, entonces $z_i < 0$ con lo que $z \notin P$, análogamente si $x_i = 1$, entonces $y_i > 1$ con lo que $y \notin P$. Por ende no es posible tener dos puntos $z, y \in P \setminus \{x\}$ tal que $x = (z+y)/2$. Así concluimos que x es efectivamente un punto extremo de P. (3 puntos).

Forma II b)
Considerando la definición de punto extremo como que no es posible encontrar $y, z \in P \setminus \{x\}$ tal que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ con $\alpha \in [0,1]$. Entonces sea $x \in P$ con coordenadas enteras en $\{0,1\}$, si tuviéramos 2 puntos $y, z \in P \setminus \{x\}$ tales que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ con $\alpha \in [0,1]$, entonces al menos deben diferir en una componente, supongamos la *i-ésima*. Luego claramente $y_i < x_i < z_i$ (o bien $z_i < x_i < y_i$, sin perdida de generalidad llamemos y a el punto tal que $y_i < x_i$), pues no puede darse que $y_i, z_i < x_i$ pues en ese caso se tendría que $x_i > \alpha y_i + (1-\alpha)z_i$ lo cual contradice la hipótesis de que x es un combinación lineal convexa de y, z. Así mismo no puede tenerse que $y_i, z_i > x_i$, pues esto implicaría que $x_i < \alpha y_i + (1-\alpha)z_i =$. De modo que $y_i < x_i < z_i$, luego si $x_i = 0$, entonces $y_i < 0$ y entonces $y \notin P$ lo que contradice la hipótesis, similarmente, si $x_i = 1$, entonces $z_i > 1$ y así $z \notin P$. Por ende concluimos que no podemos encontrar 2 puntos en $P \setminus \{x\}$ tales que x se escriba como su combinación lineal convexa, luego x es un punto extremo de P. (3 puntos).
La idea de la forma II (a) o b)) es que se argumente y demuestre por qué no pueden haber dos puntos en el poliedro (diferentes a x) tal que una combinación lineal convexa de estos resulta dar x.

b) Pensemos en $x \in P$ tal que $x_{i,j} \in]0,1[$.

b.1) En la fila. Si suponemos por contradicción de que no existe otra componente en la misma fila i en $]0,1[$, (i.e $x_{i,j'} \in \{0,1\} \quad \forall j' \neq j$), entonces deben ser solo 0 ó 1. Bien no puede haber un 1 pues en ese caso la $\sum_j x_{i,j} > 1$ lo que implica que $x \notin P$. Luego si todas las demás componentes son 0, entonces $\sum_j x_{i,j} = x_{i,j} < 1$, lo que también implica que $x \notin P$. Luego debe haber un $j' \neq j$ tal que $x_{i,j'} \in]0,1[$. Para las columnas es análogo. (1 punto)

b.2) Tomando $i_0 = i$ y $j_0 = j$, tal que x_{i_0,j_0} es fraccionario, entonces nos podemos mover a otra componente fraccionaria por la misma fila hacia otra columna j_1 que debe existir (por parte [b.1)]). Ahora desde x_{i_0,j_1} nos movemos en la misma columna hacia otra fila, digamos hacia la componente (i_1, j_1) tal que x_{i_1,j_1} es fraccionario. Ahora nos movemos por la misma fila a otra columna hacia otra componente fraccionaria (que siempre debe existir). Así iteramos sucesivamente hacia que se tiene que cerrar el ciclo, esto debe ocurrir pues el número de componentes es finito. Por ende se tiene un ciclo cerrado de componentes donde x tendrá valores fraccionarios para estas componentes.(1 punto)

b.3) De la parte anterior, llamemos $I = \{(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), ..., (i_0, j_0)\}$ el conjunto de todas las componentes del ciclo encontrado, y $I_1 = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), ...\}$ los indices de las componentes intercaladas (aquellas componentes del ciclo sobre las cuales nos movemos por la misma fila para ir a la próxima), y por ultimo definamos también $I_2 = I \setminus I_1$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, definimos y y z tal que:

$$y_{l,k} = \begin{cases} x_{l,k} & \text{si } (l,k) \notin I \\ x_{l,k} + \varepsilon & \text{si } (l,k) \in I_1 \\ x_{l,k} - \varepsilon & \text{si } (l,k) \in I_2 \end{cases} \qquad z_{l,k} = \begin{cases} x_{l,k} & \text{si } (l,k) \notin I \\ x_{l,k} - \varepsilon & \text{si } (l,k) \in I_1 \\ x_{l,k} + \varepsilon & \text{si } (l,k) \in I_2 \end{cases}$$

. $\forall (l,k) \in \{1, ..., N\}^2$. Luego dado que ε es lo suficientemente chico como para que $y, z \in P$, entonces tenemos que x puede ser obtenido como una combinación lineal convexa de dos puntos dentro de $P \setminus \{x\}$ (pues $x = (y+z)/2$), por ende x no puede ser un punto extremo del poliedro P.
Luego, hemos demostrado que si $x \in P$ tiene una componente fraccionaria, entonces no puede ser un punto extremo. Por lo tanto todo punto extremo tiene que tener solo componentes enteras en $\{0,1\}$.(1 punto)