

Dualidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 4

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Sea el problema de optimización (P):

$$(P) \text{ Max } z = c'x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

- Consideremos la siguiente relajación de (P):

$$g(y) = \text{Max}_{x \geq 0} [c'x + y'(b - Ax)] \quad (PR)$$

- Las restricciones se han reemplazado por penalizaciones en la función objetivo, ponderadas por un vector $y \geq 0$
- Al tener menos restricciones, la región factible de (PR) es mayor o igual que la (P), por lo tanto:

$$g(y) \geq z^* = c'x^*$$

- Luego, para todo vector $y \geq 0$, se obtiene una cota superior para (P)

Introducción

- Luego, la mejor cota que podemos obtener está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Min } g(y) \\ y \geq 0 \end{aligned}$$

- Pero sabemos que:

$$\begin{aligned} g(y) &= \text{Max}_{x \geq 0} [c'x + y'(b - Ax)] \\ &= y'b + \text{Max}_{x \geq 0} [(c' - y'A)x] \end{aligned}$$

- Donde:

$$\text{Max}_{x \geq 0} [(c' - y'A)x] = \begin{cases} 0 & \text{si } (c' - y'A) \leq 0 \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

- Por ahora, sólo nos interesa el caso finito, luego se tiene que la mejor cota posible está dada por:

$$\begin{array}{ccc} \text{Min } y'b & & (D) \text{ Min } w = b'y \\ c' - y'A \leq 0 & \longrightarrow & A'y \geq c \\ y \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

El Problema Dual

- El problema original (P) se conoce como el **problema primal**, mientras que (D) se conoce como el **problema dual** de (P)

$$(P) \text{ Max } z = c'x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$(D) \text{ Min } w = b'y$$

$$A'y \geq c$$

$$y \geq 0$$

- En general:

$$(P) \text{ Min } z = c'x$$

$$a'_i x \geq b_i \quad i \in M_1$$

$$a'_i x \leq b_i \quad i \in M_2$$

$$a'_i x = b_i \quad i \in M_3$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in N_1$$

$$x_j \leq 0 \quad j \in N_2$$

$$x_j \text{ libre} \quad j \in N_3$$

$$(D) \text{ Max } w = b'y$$

$$y_i \geq 0 \quad i \in M_1$$

$$y_i \leq 0 \quad i \in M_2$$

$$y_i \text{ libre} \quad i \in M_3$$

$$A'_j y \leq c_j \quad j \in N_1$$

$$A'_j y \geq c_j \quad j \in N_2$$

$$A'_j y = c_j \quad j \in N_3$$

El Problema Dual

- Notar que por cada variable en el primal se introduce una restricción en el dual y por cada restricción en el primal, una variable en el dual:

PRIMAL	minimize	maximize	DUAL
constraints	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 free	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 free	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	constraints

Ejemplo

- Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}(P) \quad & \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- Si elegimos $y_1 = 1, y_2 = 2$, ponderamos las restricciones y las sumamos, obtenemos una cota superior de z para cualquier x factible en (P):

$$\begin{aligned}z &= 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ &\leq [1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5]x_1 + [1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1]x_2 + [1 \cdot 1 + 2 \cdot 4]x_3 \leq [1 \cdot 10 + 2 \cdot 6] \\ &= 9x_1 + 0x_2 + 9x_3 \\ &\leq 22\end{aligned}$$

Ejemplo

- En particular: $z^* \leq 22$
- La mejor cota está dada por el vector y que resuelva:
 - Minimizar el valor de la cota: $(D) \text{ Min } w = 10y_1 + 6y_2$
 - Cota para el coeficiente de x_1 : $-y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1)$
 - Cota para el coeficiente de x_2 : $-2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2)$
 - Cota para el coeficiente de x_3 : $y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3)$
 - Multiplicadores positivos $y_1, y_2 \geq 0$
 - (Conservan el sentido de las desigualdades)
- Nota:
 - Se puede formular este problema a partir de (P), usando la tabla de la lámina 5.

Ejemplo

- Matricialmente:

- Primal:

$$(P) \text{ Max } z = (3 \quad -2 \quad 7) \cdot (x_1 \quad x_2 \quad x_3)'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Dual:

$$(D) \text{ Min } z = (10 \quad 6) \cdot (y_1 \quad y_2)'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Teorema

- Sea un problema de minimización (P) y su correspondiente problema dual (D). Si se obtiene el problema dual de (D) se recupera el problema original (P).
- En otras palabras *“El dual del dual es el primal”*

$$(P) \text{ Max } z = c'x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$



$$(D) \text{ Min } w = b'y$$

$$A'y \geq c$$

$$y \geq 0$$

Teoremas de Dualidad

- **Teorema de Dualidad Débil:**

- Sea x una solución factible del problema (de minimización) primal (P) e y , una solución factible del problema (de maximización) dual (D), entonces: $w = b'y \leq z = c'x$

- En otras palabras:

- w es una cota inferior para cualquier solución factible de (P)
- z es una cota superior para cualquier solución factible de (D)

- **Corolario 1:**

- Si (P) es no acotado, es decir: $z^* = -\infty$ entonces (D) es infactible
- Si (D) es no acotado, es decir: $w^* = +\infty$ entonces (P) es infactible

- **Corolario 2:**

- Si $b'y = c'x$, entonces x e y son soluciones óptimas de los problemas primal y dual, respectivamente.

Teoremas de Dualidad

- Ejemplo:

- Solución factible de (P):

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad z = 7$$

- Solución factible de (D):

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad w = 22$$

- Dualidad débil $\longrightarrow z \leq w$

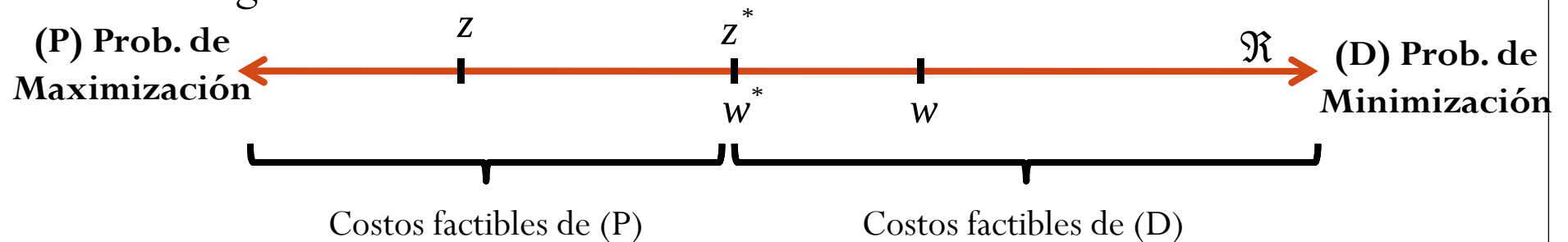
$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D) \quad & \text{Min } w = 10y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1) \\ & -2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2) \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Teoremas de Dualidad

- **Teorema de Dualidad Fuerte:**

- Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, también la tiene su dual y los respectivos costos óptimos son iguales: $z^* = w^*$



- **Posibilidades para el primal y el dual:**

	Finite optimum	Unbounded	Infeasible
Finite optimum	Possible	Impossible	Impossible
Unbounded	Impossible	Impossible	Possible
Infeasible	Impossible	Possible	Possible

Teoremas de Dualidad

- Ejemplo:

- Solución óptima de (P):

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^* = 10,5$$

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Solución óptima de (D):

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad w^* = 10,5$$

$$\begin{aligned} (D) \quad & \text{Min } w = 10y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1) \\ & -2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2) \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Dualidad fuerte $\Rightarrow z^* = w^*$

Holgura Complementaria

- **Teorema:**

- Sean x e y soluciones factibles para el problema primal y dual, respectivamente. Los vectores x e y son soluciones óptimas de sus respectivos problemas si y sólo si:

$$\begin{aligned} y_i \cdot (a'_i x - b_i) &= 0 \quad \forall i \\ (c_j - y' A_j) \cdot x_j &= 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

- Es decir:
 - La i -ésima variable dual es cero o la i -ésima restricción primal es activa y
 - la j -ésima variable primal es cero o la j -ésima restricción dual es activa
- Permite encontrar el óptimo del problema primal a través del óptimo del problema dual
 - ¡El dual puede ser más fácil de resolver!

Holgura Complementaria

- Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\
 & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 0 \cdot (-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10) &= 0 \\
 1,75 \cdot (5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6) &= 0 \\
 (3 + 0 - 5 \cdot 1,75) \cdot x_1^* &= 0 \\
 (-2 + 2 \cdot 0 - 1,75) \cdot x_2^* &= 0 \\
 (7 - 0 - 4 \cdot 1,75) \cdot x_3^* &= 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{Min } w = 10y_1 + 6y_2 \\
 & -y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1) \\
 & -2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2) \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3) \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 y_1^* \cdot (-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10) &= 0 \\
 y_2^* \cdot (5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6) &= 0 \\
 (3 + y_1^* - 5y_2^*) \cdot x_1^* &= 0 \\
 (-2 + 2y_1^* - y_2^*) \cdot x_2^* &= 0 \\
 (7 - y_1^* - 4y_2^*) \cdot x_3^* &= 0
 \end{aligned}$$

**Teorema de Holgura
Complementaria (THC)**

Precios Sombra

- Consideremos el problema en forma estándar:

$$(P) \text{ Max } c'x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

- Supongamos que existe una solución básica factible óptima no degenerada, luego: $x_B = A_B^{-1}b > 0$ con A_B la base asociada
- Si añadimos una perturbación d en b lo suficientemente pequeña:

$$x_B = A_B^{-1}(b + d) > 0$$

- Los costos reducidos no cambian al variar b : $(\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N)$
luego la base permanece óptima.

- El costo óptimo original era: $c'x^* = c'_B x_B + c'_N x_N$ (con $x_N = 0$ y $x_B = A_B^{-1}b$)
 $c'x^* = c'_B A_B^{-1}b$

- Por dualidad fuerte se sabe que: $c'x^* = y^*b$

Precios Sombra

- Luego, la solución óptima del problema dual equivale a:

$$y^* = c_B A_B^{-1}$$

- El costo óptimo luego de la perturbación cambia a:

$$\begin{aligned} c'x^* &= c'_B A_B^{-1}(b + d) \\ &= y^{*'}(b + d) \end{aligned}$$

- Con esto se concluye que cada componente y_i del vector óptimo dual puede interpretarse como el **costo marginal (precio sombra)** por aumentar en una unidad la componente i -ésima del vector b .

Precios Sombra

- Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 & z^* &= 10,5 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 & (y_1) & \\
 & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 & (y_2) & \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
 \end{aligned}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{Min } w = 10y_1 + 6y_2 & w^* &= 10,5 \\
 & -y_1 + 5y_2 \geq 3 & (x_1) & \\
 & -2y_1 + y_2 \geq -2 & (x_2) & \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 7 & (x_3) & \\
 & y_1, y_2 \geq 0 & &
 \end{aligned}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

- Aumentar la segunda restricción de (P) en 1 genera un mejoramiento de la función objetivo de 1,75 unidades $z^* = 12,25$
 - ¡Aumentar la primera restricción no sirve de nada! (marginalmente)
 - No es activa en el óptimo
- Aumentar la tercera restricción de (D) en 1 genera un empeoramiento de la función objetivo de 1,5 unidades $w^* = 12$
 - ¡Estamos minimizando!
 - ¡Aumentar las dos primeras restricciones no sirve de nada! (marginalmente)

Dualidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 4

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.