

El Método Simplex

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 3

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Se sabe que si un problema de programación lineal admite solución óptima, entonces existe una solución básica factible (sbf) que es solución óptima de él. Esto implica que:
 - Si el problema tiene solución óptima única, ésta es una solución básica factible (vértice o punto extremo del poliedro).
 - Si el problema tiene infinitas soluciones óptimas, al menos una de ellas es una solución básica factible (vértice o punto extremo del poliedro).
- El método Simplex aprovecha esto y busca la solución óptima moviéndose de una sbf a otra, a través de las aristas del poliedro factible, en una dirección que reduzca los costos.
- En este capítulo se considerará una problema en forma estándar, es decir:

$$\text{Min } c'x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Condiciones de Optimalidad

- Como todo problema de programación lineal es representado por un poliedro, basta con buscar óptimos locales, ya que en un conjunto convexo todo óptimo local es un óptimo global.
- **Óptimo Local:** Un punto x es un óptimo local si ningún punto factible cercano a él lleva a una mejora en la función objetivo.
- Formalmente: x^* es un óptimo local de P ssi:
$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap P, c'x \geq c'x^*$$
 - Donde $B(x^*, \varepsilon)$ es una bola de radio ε centrada en x^*

Propiedades de la Forma Estándar

- Recordemos que el problema en forma estándar de la primera lámina es una representación matricial del siguiente problema:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

- Sean $B(1), \dots, B(m)$ los índices de las variables básicas para una sbf del poliedro factible.
 - Recordar que en las sbf's se tiene que $x_i = 0 \quad \forall i \notin B = \{B(1), \dots, B(m)\}$
- El problema se puede escribir ahora separando las variables básicas de las no básicas...

Propiedades de la Forma Estándar

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$



$$\text{Min} \sum_{i=1}^m c_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^m A_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} A_i x_i = b$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

- En términos matriciales, lo que se hizo fue reordenar las columnas de la matriz A y las componentes de los vectores c y x de manera que se obtenga el mismo resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{matrix}$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{A_B} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{A_N}$

Propiedades de la Forma Estándar

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \dots & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \dots B(1) \dots B(2) \dots B(m) \dots \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] & \dots & \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ B(1)B(2)\dots B(m) & & & & \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{C_B} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{C_N}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \dots \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \\ B(1) \\ \dots \\ B(2) \\ \dots \\ B(m) \\ \dots \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \dots \\ \left[\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right] \\ \hline \dots \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} B(1) \\ B(2) \\ \dots \\ B(m) \\ \hline \dots \\ \hline \end{matrix}$$

$\left. \begin{matrix} \dots \\ B(1) \\ B(2) \\ \dots \\ B(m) \end{matrix} \right\} x_B$
 $\left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} x_N$

Propiedades de la Forma Estándar

- Ahora el problema se puede escribir así:

$$\text{Min } c'_B x_B + c'_N x_N \quad (1)$$

$$A_B x_B + A_N x_N = b \quad (2)$$

$$x \geq 0$$

- Sabemos que en una sbf la matriz A_B es invertible, luego de (2) se tiene:

$$x_B = \underbrace{A_B^{-1}b}_{\bar{b}} - \underbrace{A_B^{-1}A_N}_{\bar{A}_N} x_N \quad (3)$$

- Sean $\bar{b} = A_B^{-1}b$, $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N \Rightarrow x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N$

- En las sbf's se tiene que $x_N = 0$, luego $x_B = \bar{b}$

Costos Reducidos

- Reemplazando (3) en (1):

$$c'_B (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c'_N x_N$$

$$c'_B A_B^{-1}b + (c'_N - c'_B A_B^{-1}A_N)x_N$$

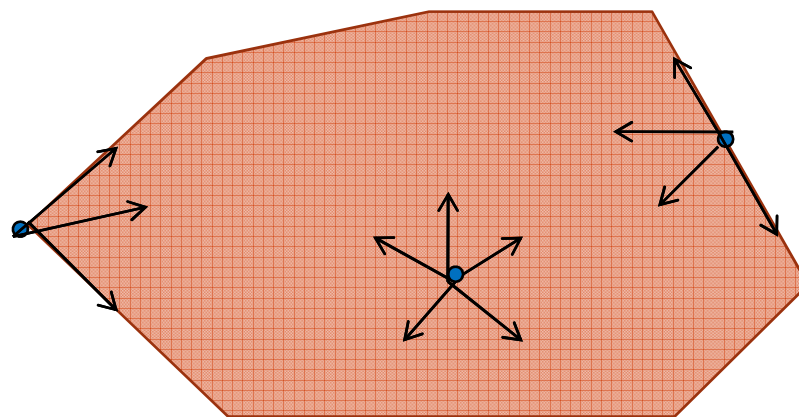
$$c'_B A_B^{-1}b + \bar{c}'_N x_N$$
- Donde llamamos **costos reducidos** a: $\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1}A_N$
- Luego el problema de optimización queda: $\min c'_B A_B^{-1}b + \bar{c}'_N x_N$

$$x \geq 0$$
 - Notar que el primer término es una constante para el problema
 - El óptimo de este problema depende de los costos reducidos:
 - Si todos los costos reducidos son no negativos, el óptimo se alcanza para $x_N = 0$ y, por lo tanto, la base elegida es una base óptima.
 - Si existe una componente “i” negativa en los costos reducidos, significa que se obtiene un beneficio al aumentar el valor de x_i , por lo que ésta debería dejar de ser una variable no básica (entraría a la base) y, por lo tanto, la base actual no es la óptima.

Dirección Factible

- Una **dirección factible** es aquella dirección en la que es posible moverse sin salir inmediatamente del poliedro.
- Formalmente, dado un poliedro P y un punto $x \in P \subseteq R^n$, un vector $d \in R^n$ es una dirección factible en x si:

$$\exists \theta > 0 / x + \theta d \in P$$



Dirección Básica Factible

- Sea x una sbf y $B = \{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las variables básicas.
 - Sabemos que $x_B = \bar{b} = A_B^{-1}b$
 $x_i = 0 \quad \forall i \notin B$
- Supongamos que queremos movernos de x a otro punto, eligiendo una de las variables no básicas “ j ” (que inicialmente vale 0) y aumentándole su valor sin modificar las demás variables no básicas.
- Usaremos la dirección: $d = (d_B \mid d_N)'$
 $d_B = (d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)})'$
 $d_N = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$
 - Donde d_N tiene sus componentes nulas excepto j , en la que vale 1.

Dirección Básica Factible

- Ahora nos movemos en la dirección d hacia el punto:

$$x + \theta d \quad \theta > 0$$

- Es decir
$$\begin{aligned} x_B + \theta d_B \\ x_N + \theta d_N \end{aligned}$$

- Como sólo interesan los puntos factibles se necesita que:

$$A(x + \theta d) = b$$

- Pero como x ya era factible ($Ax = b$) se necesita que $Ad = 0$

$$Ad = \sum_{i=1}^n A_i d_i = \sum_{i=1}^m A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j = A_B d_B + A_j = 0$$

- Despejando se obtiene la j -ésima dirección básica factible:

$$d_B = -A_B^{-1} A_j$$

Dirección Básica Factible

- Al moverse en una dirección d , también se debe verificar si se mantiene la no negatividad de las variables:
 - Las variables no básicas, que valen 0 inicialmente, no sufren cambios, excepto la variable x_j , la que sólo puede aumentar, ya que $d_j = 1$ y $\theta > 0$
- Para las variables básicas hay 2 casos:
 - El punto de partida x es no degenerado, lo que implica que $x_B > 0$ y para un θ suficientemente pequeño $x_B + \theta d_B \geq 0$
 - El punto de partida x es degenerado, es decir, existe $x_{B(i)} = 0$, y puede ocurrir que la correspondiente componente de d sea negativa, violando inmediatamente la no negatividad para cualquier valor de θ

$$d_{B(i)} = \left(-A_B^{-1} A_j \right)_{B(i)} < 0$$

Dirección Básica Factible

- Al moverse en esta dirección la tasa de cambio en la función objetivo estará dada por $c'd$

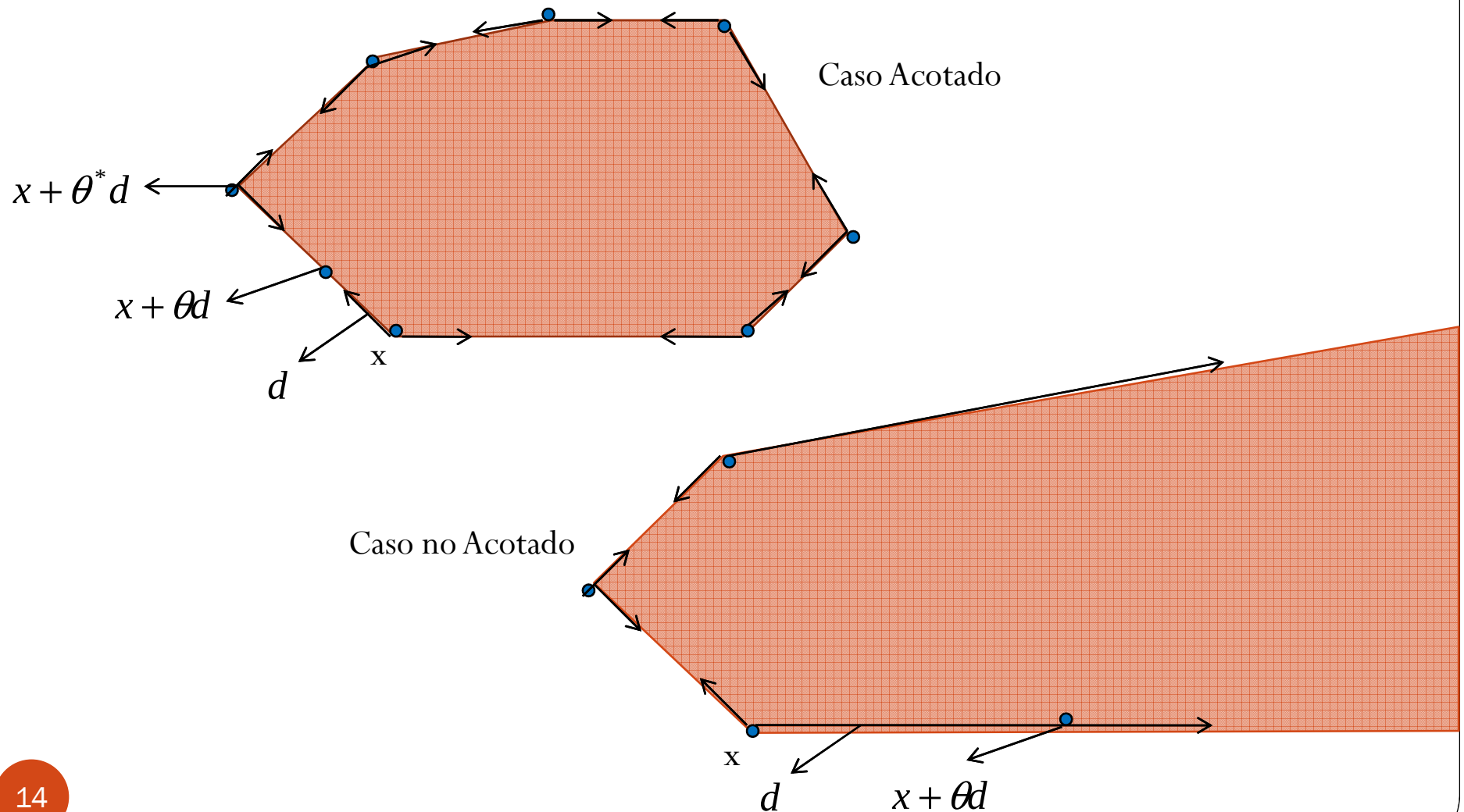
$$c'd = c'_B d_B + c_j$$

- Reemplazando d_B se recupera el costo reducido de la variable no básica j :

$$c'd = c_j - c'_B A_B^{-1} A_j = \bar{c}'_j$$

- Luego, si el costo reducido de la variable j es negativo, conviene moverse en la j -ésima dirección básica, ya que la función objetivo disminuye.
- Si es positivo, no conviene moverse en esa dirección, pues se empeora el valor de la función objetivo.
- Si es cero, es indiferente el moverse en esa dirección.

Dirección Básica Factible



Condiciones de Optimalidad

- Sea x un sbf y sea $\bar{c}$ el vector de costos reducidos correspondiente:
 - a) Si $\bar{c} \geq 0$, entonces x es óptimo
 - b) Si x es óptimo y no degenerado, entonces $\bar{c} \geq 0$
- Una base se dice óptima si cumple factibilidad y no negatividad de los costos reducidos:
 - a) $\bar{b} = A_B^{-1}b \geq 0$ y
 - b) $\bar{c}' = c' - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$

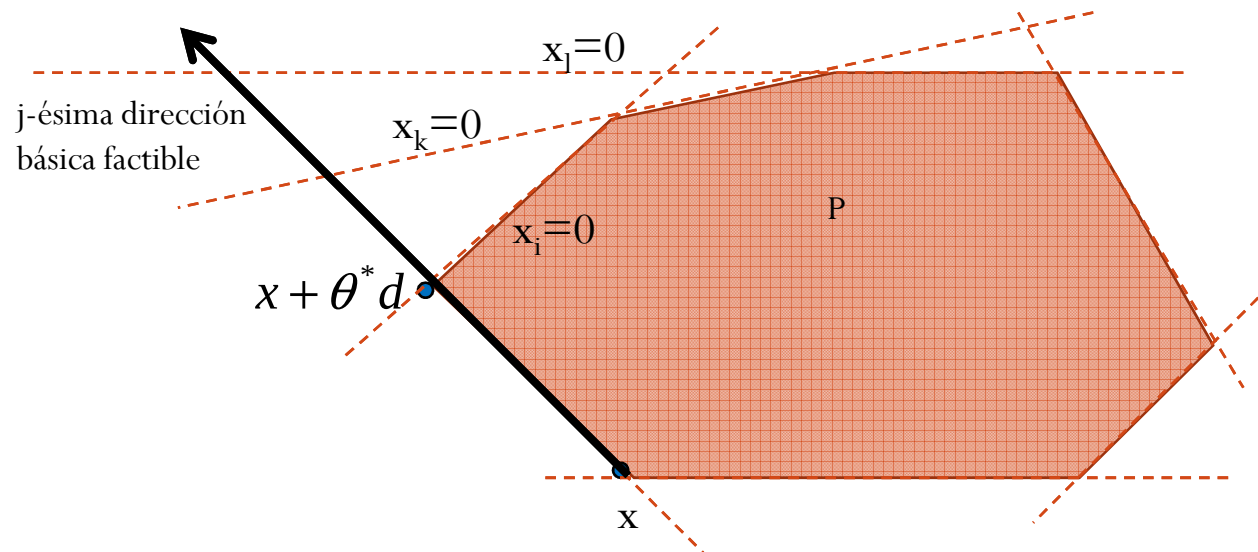
Desarrollo del Método Simplex

- Hasta ahora sabemos:
 - Verificar si la sbf actual es óptima
 - Cómo movernos desde una sbf a través de la j -ésima dirección básica factible
- Falta por saber:
 - Cuánto moverse a lo largo de la j -ésima dirección básica factible
 - Cómo escoger esa dirección
- En lo que sigue asumiremos que todas las sbf son no degeneradas.

Desarrollo del Método Simplex

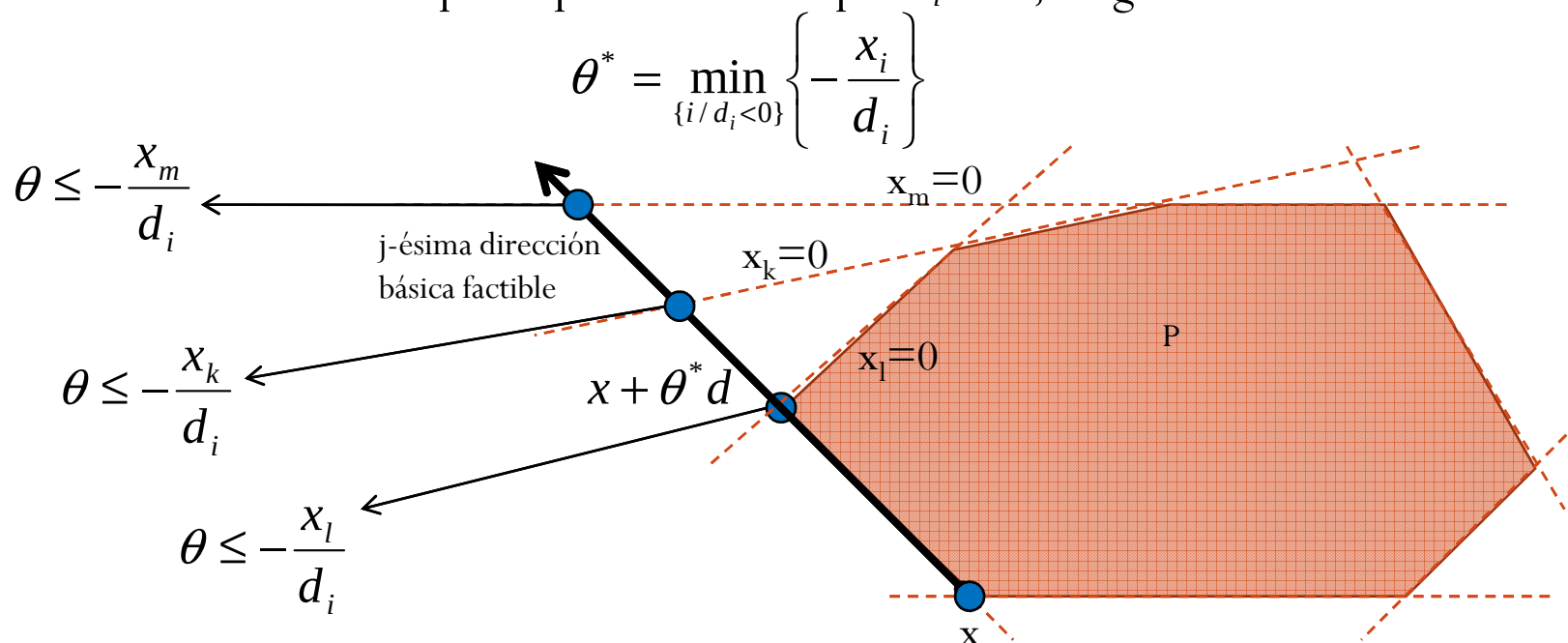
- Supongamos que en la sbf x se tiene que el j -ésimo costo reducido es negativo. Luego, es conveniente moverse en la j -ésima dirección básica factible.
- Como al moverse en esta dirección se está reduciendo el valor de la función objetivo, conviene moverse lo máximo posible, manteniendo la factibilidad, luego se escoge θ^* que cumple:

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 / x + \theta d \in P\}$$



Desarrollo del Método Simplex

- La única forma en que se viola la factibilidad del problema al moverse en una **dirección básica factible** es si alguna componente se hace negativa. Luego hay 2 casos:
 - Si $d \geq 0$ entonces $x + \theta d$ nunca se hace infactible y se tiene que $\theta^* = \infty$
 - Si $d_i < 0$ para alguna componente i , entonces $x_i + \theta d_i \geq 0 \Rightarrow \theta \leq -\frac{x_i}{d_i}$
 - Esto debe cumplirse para todo i tal que $d_i < 0$, luego:



Desarrollo del Método Simplex

- Ahora estamos en $x + \theta^* d$
 - Notar que la variable no básica x_j ya no es nula y vale θ^*
$$x_j + \theta^* d = 0 + \theta^* 1 = \theta^*$$

- Notar también que la variable básica x_l ahora es nula

$$\theta^* = -\frac{x_l}{d_l} \quad \longrightarrow \quad x_l + \theta^* d_l = 0$$

- Esto sugiere que la variable x_j reemplace a x_l en la base
 - Se dice que x_j **entra a la base** y x_l **sale de la base**

- **Teorema:**

- La nueva matriz $\hat{A}_{B(i)} = \begin{cases} A_{B(i)} & i \neq l \\ A_j & i = l \end{cases}$ tiene columnas l.i. y, por lo tanto es una matriz básica
- El punto $y = x + \theta^* d$ es la sbf asociada a la matriz $\hat{A}_B$

Una Iteración de Simplex

1. Comenzamos con una base $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ y una sbf asociada x .
2. Calcular los costos reducidos para todas las variables no básicas $\bar{c}'_j = c'_j - c'_B A_B^{-1} A_j$. Si todos son no negativos entonces la sbf actual es óptima y el algoritmo termina. Si no, escoger algún j con $\bar{c}'_j < 0$
3. Calcular j -ésima dirección básica factible $d = -A_B^{-1} A_j$. Si ninguna de sus componentes es negativa entonces el problema es no acotado, su óptimo es $-\infty$ y el algoritmo termina.

Una Iteración de Simplex

4. Si alguna componente de d es negativa, calcular

$$\theta^* = \min_{\{i \in B / d_i < 0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}$$

5. Sea l tal que $\theta^* = -\frac{x_l}{d_l}$. Formar una nueva base reemplazando A_l con A_j . Si “ y ” es la nueva sbf, sus valores están dados por:

$$y_j = \theta^*$$

$$y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)}$$

Finitud de Simplex

Teorema:

- Asumiendo que el conjunto factible es no vacío y que todas las sbf's son no degeneradas, entonces el método Simplex termina en un número finito de iteraciones y entrega una de las siguientes posibilidades:
 - Una base B óptima y su correspondiente sbf que es óptima.
 - Una dirección d de crecimiento factible e infinito, luego el costo óptimo es menos infinito.

Simplex con Degenerancia

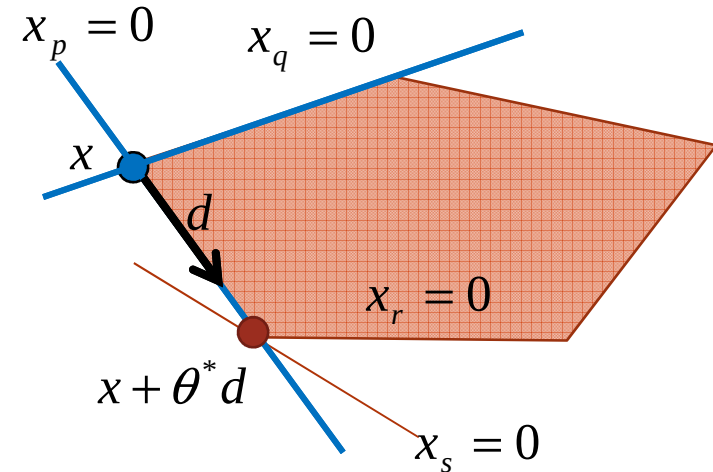
- Si se usa exactamente el mismo algoritmo en presencia de degenerancia pueden ocurrir las siguientes posibilidades:
- Si la sbf actual $\mathbf{x}$ es degenerada puede ocurrir que $\theta^* = 0$ con lo cual la nueva sbf $\mathbf{y}$ es la misma que $\mathbf{x}$. En este caso, a pesar de que se obtiene una base distinta se mantiene la misma sbf asociada a ambas bases.
- Si $\theta^* > 0$ puede ocurrir que más de una de las variables básicas se haga cero en el nuevo punto $\mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$. Como sólo una de ellas sale de la base y la otra se mantiene en ella valiendo cero, la nueva sbf es degenerada.

Simplex con Degenerancia

- Al moverse a $x + \theta^* d$ se tiene que hay 2 variables que se anulan:

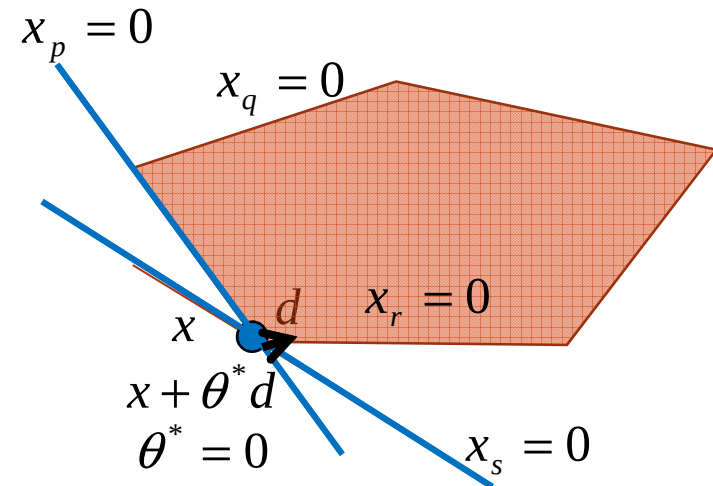
$$x_r = 0 \quad \text{y} \quad x_s = 0 \quad .$$

- Luego puede escogerse cualquiera de ellas para salir de la base.



- Al intentar moverse en la dirección d , se tiene que $\theta^* = 0$

- Luego el nuevo punto corresponde al mismo punto anterior.

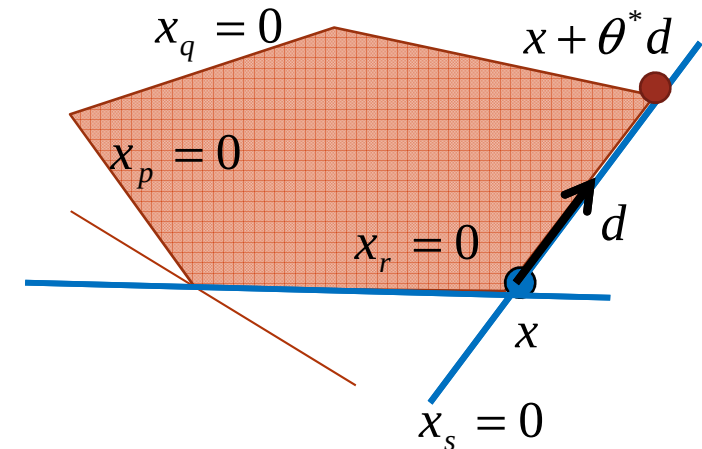
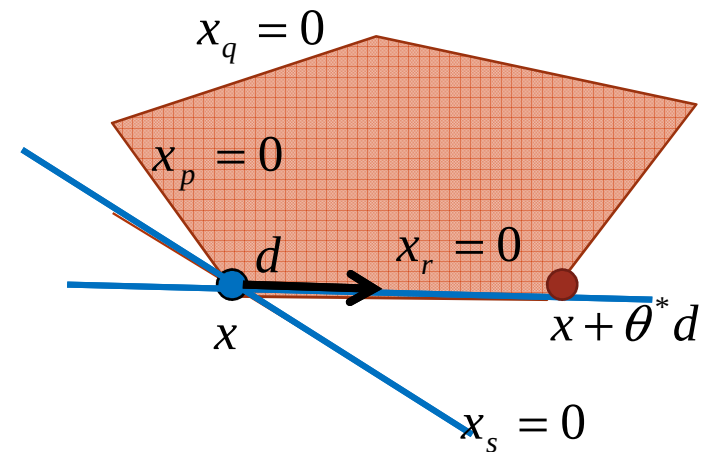


Simplex con Degenerancia

- En estas condiciones el algoritmo puede, eventualmente, volver a la base inicial y quedar atrapado en un loop infinito.
- Para evitar esto se utilizan las llamadas **reglas de pivoteo** las cuales sirven para elegir qué variables entran y salen de la base en cada iteración.

Simplex con Degenerancia

- El algoritmo puede quedarse más de una iteración en el mismo punto x .
 - Lo ideal sería garantizar que no se quedará atrapado en un loop infinito.
- Para ello existen las reglas de pivoteo...



Simplex con Degenerancia

- **Criterios de entrada a la base:**
 - Escoger la variable que tenga el mínimo costo reducido (asegura la máxima tasa de mejora en la función objetivo en cada iteración)
 - Escoger la primera variable que tenga costo reducido negativo en orden lexicográfico (es mucho más simple y tiene menor costo computacional)
- **Criterios de salida de la base:**
 - Si hay más de una variable que se anula en la nueva sbf, escoger la primera en orden lexicográfico (la que tenga el menor índice).
- Usando estos criterios se logra evitar que el método Simplex se quede atrapado en un loop.

El Método Simplex

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 3

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.