Profesores: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti.
Auxiliares: Víctor Bucarey, Charles Thraves, Nelson Devia, Alfredo Torrico.
Coordinador: Nicolás Padilla.

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar 4

14 de Abril de 2011

P1. Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ y x^* una solución básica factible no degenerada. Introducimos las variables de holgura z y construimos el correspondiente poliedro $P' = \{(x, z) | Ax + z = b,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$ en forma estándar. Muestre que $(x^*, b - Ax^*)$ es una solución básica factible no degenerada para P'.

P2. Considere el problema de minimización $c^t x$ en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

(a) Una solución factible x es óptima ssi $c^t d \geq 0$, para toda dirección factible d en x.

(b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^t d > 0$ para toda dirección factible $d \neq 0$ en x.

P3. Discuta los siguientes casos y evalúe si tiene solución óptima, es un problema no acotado, o no tiene solución en curso y se puede mejorar.

(a)

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & 3x_3 + x_4 & & \\ \text{s.a.} & -3x_3 + 3x_4 & \leq & 6 \\ & -8x_3 + 4x_4 & \leq & 4 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -3x_3 + x_4 & & \\ \text{s.a.} & -3x_3 + 3x_4 & \leq & 6 \\ & -8x_3 + 4x_4 & \leq & 4 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & 3x_3 - x_4 & & \\ \text{s.a.} & -3x_3 + 3x_4 & \leq & 6 \\ & -8x_3 + 4x_4 & \leq & 4 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

P4. Resuelva el siguiente problema mediante el método Simplex (Fase I y II)

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & x_1 - 2x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ & x_1 + x_4 & = & 4 \\ & x_1 - x_2 & = & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución

P1. Primero debemos darnos cuenta que P no está en forma estándar, por lo que no podemos argumentar que x^* tiene m componentes positivas.

Luego de esto, tenemos que $x^* \geq 0$, ya que es un punto factible en P, y por lo tanto también se tiene que $b - Ax^* \geq 0$, por definición de P. Con esto tenemos la no negatividad de $(x^*, b - Ax^*)$ en P'. Ahora veamos que se cumpla la factibilidad en P', es decir, $Ax + z = b$. En efecto, tomando el par $(x^*, b - Ax^*)$ se tiene que

$$Ax + z = Ax^* + b - Ax^* = b.$$

Para revisar la no degenerancia, veamos la cantidad q de restricciones de P que se cumplen con igualdad en x^*:

- Si $q = m$ se tiene que $Ax^* = b$, y como x^* debe definirse por n restricciones de igualdad, se tiene que $n - m$ restricciones de $x^* \geq 0$ deben cumplirse con igualdad, por lo que $n - m$ componentes de x^* deben ser nulas. Como $z = b - Ax^* = 0$, se tiene que las m componentes de z son nulas, luego el par $(x, z) = (x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por lo tanto, tiene m componentes positivas, luego es no degenerado.
- Si $q = m - 1$ se tiene que $a_j^t x^* = b_j \ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \setminus k$ y $a_k^t x^* < b_k$, para algún k, y como x^* debe definirse por n restricciones de igualdad, se tiene que $n - m + 1$ componentes de x^* deben ser nulas. Como $z = b - Ax^*$, entonces $z_k = b_k - a_k^t x^* > 0$ y $z_j = b_j - a_j^t x^* = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \setminus k$, luego se tiene que $m - 1$ componentes de z son nulas, entonces el par $(x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por lo tanto, tiene m componentes positivas, luego es no degenerado.
- En general, si $q = m - p$, sea G el conjunto de restricciones de $Ax^* = b$ y sea $I \subseteq G$ el conjunto de las restricciones que se cumplen con igualdad ($|I| = m - p$). Se tiene que $a_j^t x^* = b_j \ \forall j \in I$ y $a_k^t x^* < b_k \ \forall k \in G \setminus I$, como x^* debe definirse por n restricciones de igualdad, se tiene que $n - |I| = n - m + p$ componentes de x^* deben ser nulas. Como $z = b - Ax^*$, entonces $z_k = b_k - a_k^t x^* > 0 \ \forall k \in G \setminus I$ y $z_j = b_j - a_j^t x^* = 0 \ \forall j \in I$, se tiene que $m - p$ componentes de z son nulas, luego el par $(x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por lo tanto, tiene m componentes positivas, luego es no degenerado.

P2. **(a)** ($\Rightarrow$) Hagámoslo por contradicción.

Sea x una solución óptima, es decir, $c^t x \leq c^t y \ \forall y \in P$. Supongamos que existe d tal que $c^t d < 0$. Sea $y = x + \theta d, \theta > 0$. Como x es óptimo se tiene que

$$\begin{aligned} c^t x \leq c^t y \quad &\Rightarrow \quad c^t x \leq c^t (x + \theta d) \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \theta c^t d \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq c^t d \rightarrow\leftarrow \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $c^t d \geq 0 \ \forall d$, donde d es una dirección factible. Sea y cualquiera tal que $d = y - x$, entonces

$$\begin{aligned} c^t d \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad c^t (y - x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad c^t y \geq c^t x \end{aligned}$$

Luego x es óptimo.

(b) ($\Rightarrow$) Hagamóslo por contradicción.
Sea x el único punto óptimo $c^t x < c^t y \ \forall y \in P \setminus \{x\}$. Además, todo $y \in P \setminus \{x\}$ se puede escribir como $y = x + \theta \overline{d}$ con $\theta > 0$, ya que P es un conjunto convexo. Supongamos que existe $\overline{d}$ factible tal que $c^t \overline{d} \leq 0$. Al multiplicar por θ y sumar $c^t x$ en ambos lados, se obtiene que:

$$c^t (x + \theta \overline{d}) \leq c^t x$$

$$c^t y \leq c^t x \ \rightarrow\leftarrow$$

($\Leftarrow$) Sea y otra solución óptima, con $x \neq y$. Como $y \in P$, $\exists \overline{d}$ tal que $y = x + \theta\overline{d}$, ya que P es convexo. Además, tenemos que $c^t d > 0$ $\forall d$, con d una dirección factible, en particular para $\overline{d}$ se tiene $c^t\overline{d} > 0$. Si multiplicamos la ecuación anterior por $\theta > 0$ y le sumamos $c^t x$, entonces

$$c^t(x + \theta\overline{d}) > c^t x$$

$$c^t y > c^t x$$

Luego x es el único óptimo.

P3. **(a)** Escribiendo el problema en forma estándar (con variables de holgura) se tiene que:

$$\begin{array}{lccc} \text{mín} & 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + x_4 & & \\ \text{s.a.} & x_1 - 3x_3 + 3x_4 & = & 6 \\ & x_2 - 8x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Con esto elejimos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde x_B, x_N, son las variables básicas y no básicas, respectivamente (con x_1, x_2 vas varibles de holgura). Dado esto podemos despejar x_1 y x_2 en función de x_3, x_4, y reemplazar en la función objetivo.

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto tenemos que los costos reducidos para las variables básicas es cero, pero en cambio para las variables no básicas se tiene:

$$\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = (3, 1) \geq 0$$

Con esto tenemos que la solución $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es óptima.

(b) Escribiendo el problema en forma estándar (con variables de holgura) se tiene que:

$$\begin{array}{lccc} \text{mín} & 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 + x_4 & & \\ \text{s.a.} & x_1 - 3x_3 + 3x_4 & = & 6 \\ & x_2 - 8x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Tal como en la parte anterior, $x = (6, 4, 0, 0)^t$ es una solución factible, pero no es óptima ya que existe j tal que $\overline{c}_j < 0$. En efecto,

$$\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = (-3, 1),$$

por lo que tenemos $\overline{c}_3 < 0$, es decir, conviene dar un valor positivo a la variable no básica x_3, o sea, x_3 debe entrar a la base. Ahora calculemos

$$u = B^{-1} N_{x_3} = I \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

cuyas componentes son todas no positivas, por lo tanto la columna pivote no nos sirve. Esto quiere decir que el valor del costo óptimo es $-\infty$, ya que x_3 puede crecer indefinidamente al entrar a la base. Otra forma de verlo es la siguiente, debemos respetar la positividad de las variables básicas (en cambio las no básicas, x_4, permanecen fijas), con esto imponemos la condición

$$x_1 = -3x_4 + 6 + 3x_3 \geq 0$$

$$x_2 = -4x_4 + 4 + 8x_3 \geq 0$$

de la cual observamos, que x_3 puede crecer indefinidamente. Con esto el problema es no acotado.

(c) Escribiendo el problema en forma estándar (con variables de holgura) se tiene que:

$$\begin{array}{lccc} \text{mín} & 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 - x_4 & & \\ \text{s.a.} & x_1 - 3x_3 + 3x_4 & = & 6 \\ & x_2 - 8x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Nuevamente tenemos que $x = (6, 4, 0, 0)^t$ es una solución factible, pero no óptima ya que los costos reducidos relacionados a las variables no básicas tienen la siguiente forma

$$\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = (3, -1),$$

con lo cual conviene que x_4 tome valor positivo, es decir, que entre a la base. Por otro lado mantenemos afuera de la base a la variable $x_3 = 0$. Admemás debemos respetar las condiciones,

$$x_1 = 3x_3 + 6 - 3x_4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 6 - 3x_4 \geq 0$$

$$x_2 = -4x_4 + 4 + 8x_3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 4 - 4x_4 \geq 0$$

dado esto, el valor crítico para x_4 es $\text{mín}\left\{\frac{6}{3}, \frac{4}{4}\right\} = 1$, con lo que la varieble x_2 se anula y sale de la base. Puede analizarlo con el método del tableau.

P4. Primero procedemos con la Fase I del método Simplex, para encontrar una base factible al problema, es decir resolvemos el siguiente problema, agregando las variables de holgura x_5, x_6, x_7

$$\begin{array}{lccc} \text{mín} & x_5 + x_6 + x_7 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 & = & 1 \\ & x_1 + x_4 + x_6 & = & 4 \\ & x_1 - x_2 + x_7 & = & 0 \\ & x_i & \geq & 0 \ \forall i \end{array}$$

El tableau antes de la primera iteración es de la siguiente forma

$z = -1^t b$	$-1^t A$	0
b	A	I

Con esto, antes de la primera iteración tenemos (con asterisco marcamos los pivotes):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-5	-3	0	1	-1	0	0	0
x_5=1	1	1	-1	0	1	0	0
x_6=4	1	0	0	1	0	1	0
x_7=0	1*	-1	0	0	0	0	1

$$x = (0, 0, 0, 0, 1, 4, 0)^t$$

Primera Iteración:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-5	0	-3	1	-1	0	0	3
x_5=1	0	2*	-1	0	1	0	-1
x_6=4	0	1	0	1	0	1	-1
x_1=0	1	-1	0	0	0	0	1

$$x = (0, 0, 0, 0, 1, 4, 0)^t$$

Segunda Iteración:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-7/2	0	0	-1/2	-1	3/2	0	3/2
x_2=1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	-1/2
x_6=7/2	0	0	1/2	1^*	-1/2	1	-1/2
x_1=1/2	1	0	-1/2	0	1/2	0	1/2

$$x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{7}{2}, 0)^t$$

Tercera Iteración:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	1	1	1
x_2=1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	-1/2
x_4=7/2	0	0	1/2	1	-1/2	1	-1/2
x_1=1/2	1	0	-1/2	0	1/2	0	1/2

$$x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, 0, 0, 0)^t$$

Finalmente en la última iteración todas las variables artificiales salieron de la base, los costos reducidos asociados toman el valor 1 (siempre cierto) y $z^* = 0$. Con esto tenemos una solución básica factible, nos queda por eliminar las variables artificiales y recalcular los costo reducidos y el valor objetivo para esta solución. La tabla se reduce a

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2=1/2	0	1	-1/2	0
x_4=7/2	0	0	1/2	1
x_1=1/2	1	0	-1/2	0

El vector de costos está dado por $c^t = (1, -2, 0, 0)$, por lo que:

$$c_B^t = (c_2, c_4, c_1) = (-2, 0, 1), \quad c_N^t = (c_3) = (0)$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado. Las matrices B y N del problema original son:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los costos reducidos serán:

$$\overline{c}_B^t = (0, 0, 0)$$

$$\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = 0 - (-2, 0, 1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{3ra columna del recuadro}} = -\frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$c_B^t B^{-1} b = (-2, 0, 1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Por lo que el cuadro queda de la siguiente forma

	x_1	x_2	x_3	x_4
1/2	0	0	-1/2	0
x_2=1/2	0	1	-1/2	0
x_4=7/2	0	0	$1/2^*$	1
x_1=1/2	1	0	-1/2	0

Y empazamos con la Fase II, pivoteando sobre el elemento con asterisco en la tabla anterior
Primera iteración:

	x_1	x_2	x_3	x_4
4	0	0	0	1
x_2=4	0	1	0	1
x_3=7	0	0	1	2
x_1=4	1	0	0	1

En este recuadro se satisfacen las condiciones de optimalidad, por lo que la solución óptima del problema original es $\overline{x} = (4, 4, 7, 0)^t$, y el valor de la función objetivo es $c_B^t B^{-1} b = -4$.