DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Roberto Cominetti, Daniel Espinoza G.
Semestre: Otoño 2011

IN3701 Optimización

Control N$^{\underline{o}}$1

P1 Usted es el gerente de bodega de la prestigiosa compañía Chanta-Icha y se le ha encomendado realizar la planificación para los próximos T periodos de tiempo. Considere que existe un conjunto I de productos que se pueden llevar a la bodega, los cuales son almacenados en pallets (contenedores de madera) de distintos tamaños dependiendo del producto. Llamaremos v_i al tamaño del pallet del producto i y I_i^o al inventario inicial (al final del periodo $t = 0$).

La compañía tiene varios proveedores que suministran los productos a diferentes precios, considere que el precio de compra de un pallet del producto i al proveedor j es de CP_{ij} unidades monetarias [u.m.]. En cada periodo de tiempo se le asigna un presupuesto de $PPTO_t$ [u.m.] destinado a la compra de productos.

La bodega tiene una capacidad de CAP unidades de volumen, pero existe la posibilidad de expandirla en cualquier periodo t dentro del horizonte de planificación a un altísimo costo fijo de CF_t [u.m.] y un costo por unidad de volumen expandida de CV_t [u.m.], ambos dependientes del periodo en el que se realice la expansión.

Dentro del conjunto de productos existen algunos pares no compatibles entre si, que no deben almacenarse en la bodega al mismo tiempo por motivos de seguridad, llamaremos NC al conjunto de pares i,k que son no compatibles.

Es de suma importancia satisfacer la demanda de cada producto en todo periodo de tiempo, la cual está dada por d_{it}. Sin embargo, por tiempos de entrega, esta demanda sólo puede satisfacerse con productos almacenados en la bodega y no con los que se compran en el mismo período.

La bodega obtiene una utilidad de U_{it} [u.m.] por cada pallet del producto i almacenado entre los períodos t y $t+1$. La empresa desea maximizar las utilidades totales del horizonte de planificación, considerando las eventuales expansiones de la bodega (no se consideran la compra y venta de productos). Formule un Modelo de Programación Lineal Mixto que permita tomar las decisiones óptimas para lograr el objetivo propuesto.

P2 Considere una serie de variables booleanas $\{p_i\}_{i=1}^n$, y una formula booleana S en forma 3-conjuntiva normal, es decir

$$S := \bigwedge_{j=1}^{m} S_j$$

donde $S_j = (q_{1j} \vee q_{2j} \vee q_{3j})$, y donde q_{kj} es algún p_i o $\sim p_i$, $i = 1, \ldots, n$[1].

1. Formule el problema (lineal entero) de minimizar el número total de clausulas (S_j, $j = 1, \ldots, m$) falsas en S.
2. Formule el problema (lineal entero) de maximizar el número de variables booleanas verdaderas, sujeto a que a lo mas u clausulas son falsas.

P3 (a) Sea P un poliedro en $\mathbb{R}^N$ contenido en el cubo unitario, $P \subseteq [0,1]^N$. Sea $x \in P$ un punto del poliedro cuyas coordenadas son enteras: $x_i \in \{0,1\}$ para todo $i = 1, \ldots, N$. Demuestre que x es un punto extremo.

(b) Considere ahora el poliedro $P \subseteq [0,1]^N$ en dimensión $N = n^2$, conocido como el poliedro de *matrices bi-estocásticas*, definido por

$$\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \forall i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \ \geq \ 0 & \forall i, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Probaremos que todo punto extremo de P tiene coordenadas enteras. Para ello considere $x \in P$ el que visualizamos como matriz $x = (x_{ij})$. Suponga que x tiene alguna componente fraccionaria $x_{ij} \in]0,1[$

(b.1) Muestre que en la fila i debe existir otra coordenada fraccionaria $x_{ij'} \in]0,1[$ lo mismo que en la columna j existe $x_{i'j} \in]0,1[$.

(b.2) Moviéndose alternada-mente entre filas y columnas argumente que existe un ciclo de componentes fraccionarias

$$x_{i_0 j_0}\ ,\ x_{i_0 j_1}\ ,\ x_{i_1 j_1}\ ,\ x_{i_1 j_2}\ ,\ x_{i_2 j_2}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i_k j_k}$$

con $i_k = i_0$ y $j_k = j_0$.

Indicación: para inspirarse considere primero el caso $n = 3$.

[1] $\sim p_i \vee p_i = \text{true}$

(b.3) Use lo anterior para mostrar que x no es un punto extremo, y concluya que todo punto extremo tiene coordenadas enteras.