

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 3
7 de Abril de 2011

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y sea c alguna constante. Pruebe que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ es convexo.

Problema 2

Considere un poliedro en forma estándar $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son linealmente independientes.

- Suponga que hay dos Bases distintas asociadas a la misma solución básica $\bar{x}$. Muestre esta solución es “degenerada”.
- Suponga que todas las soluciones básicas factibles son “no degeneradas”. Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. ¿Qué ocurre si eliminamos el supuesto de “no degeneradas”?

Problema 3:

(a)

Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i'x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$. Suponga que u y v son soluciones básicas distintas que satisfacen $a_i'u = a_i'v = b_i, i = 1, \dots, n-1$, y que los vectores $a_1, \dots, a_{n-1}$ son linealmente independientes. (En particular, u y v son adyacentes). Sea $L = \{\lambda u + (1-\lambda)v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ el segmento que une u y v . Demuestre que $L = \{z \in P \mid a_i'z = b_i, i = 1, \dots, n-1\}$.

(b)

Sea P un poliedro acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea a un vector en $\mathbb{R}^n$ y b un escalar. Definimos

$$Q = \{x \in P \mid a'x = b\}$$

Muestre que todo punto extremo de Q o es un punto extremo de P o es una combinación convexa de dos puntos extremos adyacentes de P .

Problema 4

Suponga que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i'x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i'x \geq h_i, i = 1, \dots, k\}$, son dos representaciones del mismo poliedro no vacío. Suponga que los vectores a_i cubren $\mathbb{R}^n$. Muestre que lo mismo es verdad para los vectores g_i .

Problema 5

Su buen amigo David Piñeda, emprendedor microempresario, ha decidido comenzar un nuevo negocio: se dedicará a la elaboración y venta de “permufes”, que son sucedáneos de perfumes pero con ingredientes de menor calidad para abaratar costos. Para esto, ha creado su nueva microempresa, llamada “Los Amigurumis”.

Piñeda puede elaborar un conjunto N de distintos productos, para lo cual utiliza un conjunto M de insumos distintos. Para elaborar un litro del producto j ($j \in N$), se necesitan a_{ij} mililitros (ml) del insumo i ($i \in M$). El microempresario ha decidido, después de un intenso estudio de mercado, vender cada producto a un precio P_j por cada 100 ml.

Piñeda no tiene contacto con buenos proveedores, por lo que le ha pedido a su camarada Gonzalo Descortés que se los envíe desde la ZOFRI¹. En cada período, la capacidad máxima de insumo i a pedir es de CAP_i ml y el costo por ml de insumos es de C_i . Además, existe un costo fijo de transporte CT , aunque si se lleva más de Q litros se debe pagar una tasa $TASA\%$ adicional sobre CT por cada litro de insumos por sobre Q . Considere que se cuenta con un presupuesto destinado a compra de insumos de PPTO para cada período del horizonte de evaluación T .

Para elaborar los permufes, su amigo puede seguir K procesos de producción distintos (cada proceso usa instrumentos diferentes, por ejemplo). Si se usa el proceso k ($k \in K$) en el período t ($t \in T$), se incurre en un costo fijo de producción CP_{jkt} para el producto j . Note que debe usar el mismo proceso para todos sus productos en cada período². Sea $V_{kk'}$ un parámetro que vale 1 si el cambio del proceso k al proceso k' de un período al siguiente es compatible y 0 sino ($k, k' \in K$).

Por otro lado, el microempresario sabe que hay sucedáneos de perfumes muy similares entre sí, por lo que si produce el permufe “Marshello” no puede producir “Crepúsculo” (para que no compitan entre sí). De la misma forma, hay permufes que se complementan muy bien, por lo que si decide producir el permufe “Caldo”, debe producir también “Flores”. Por último, y aunque Piñeda lo considera la mayor injusticia del mundo, su camarada Descortés le ha exigido (para devolverle el favor) que su permufe favorito “ZMRR” tenga una producción mayor al 25% del total.

Construya un modelo de programación lineal entera mixta, que ayude a su amigo a decidir cuántos litros de cada producto producir, de forma de maximizar las utilidades obtenidas. Suponga que no hay inventario de productos ni de insumos, es decir, se debe usar en un período todo lo que compró para producir y además todo lo producido se venderá.

¹ Zona Franca de Iquique.

² Por ejemplo, si en el período 1 decide usar el proceso 3, todos los productos se elaborarán con ese proceso. Luego, si para el período 2 elige el proceso 5, todos se producen con ese proceso, etc.

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 3
7 de Abril de 2011

Problema 1

Sean x, y en $S = \{x \in R^n : f(x) \leq c\}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Debemos probar que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$

$$\begin{aligned} f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \text{ ya que } f \text{ es una función convexa} \\ &\leq \lambda c + (1-\lambda)c, \text{ ya que } x, y \text{ pertenecen a } S \\ &= c \end{aligned}$$

Por lo tanto $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$, luego S es un conjunto convexo.

Problema 2

a)

Se debe demostrar que $\bar{x}$ es degenerada, es decir, que tiene más de $n-m$ componentes nulas.

Sean B_1, B_2 dos bases distintas asociadas a $\bar{x}$.

Por definición sabemos que $\bar{x}_i = 0 \forall i \notin B_1$ (variables no básicas) y, del mismo modo, $\bar{x}_j = 0 \forall j \notin B_2$. Para las variables básicas: $\bar{x}_i \geq 0 \forall i \in B_1$ y $\bar{x}_j \geq 0 \forall j \in B_2$.

Como las bases son distintas, necesariamente existe $k \in B_1$ tal que $k \notin B_2$ (o viceversa).

Como $k \in B_1$, entonces $\bar{x}_k \geq 0$ (variable básica)

Y como $k \notin B_2$, entonces $\bar{x}_k = 0$ (variable no básica)

Pero como ambas bases definen a $\bar{x}$ se tiene que $\bar{x} = 0$ con $k \in B_1$, es decir, se tiene una variable básica nula, por lo que hay más de $(n-m)$ variables nulas en $\bar{x}$, con lo cual es una solución degenerada.

b)

Como $x \in P$ cumple que $Ax = b$, luego $\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$

Sean $\{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x .

Luego $\sum_{j=1}^m A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema "cuadrado" con solución única, lo que implica

que las columnas $A_{B(j)}$ son l.i.

Si las m columnas son l.i. entonces las m filas también lo son, por lo que se tienen m restricciones activas l.i. Como ya se tenían $(n-m)$ variables nulas, se tienen n restricciones activas l.i. en el punto x .

Luego x es una solución básica factible.

Si eliminamos el supuesto de "no degeneradas" el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas, basta considerar el punto donde se produce la degenerancia y

moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto se tienen m componentes positivas en un punto interior.

Problema 3

(a)

Sea $x \in L$, luego $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $0 \leq \lambda \leq 1$

Pre-multiplicando por a'_i , $i = 1, \dots, n - 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} a'_i x &= \lambda a'_i u + (1 - \lambda) a'_i v, & 0 \leq \lambda \leq 1, i = 1, \dots, n - 1 \\ a'_i x &= \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i, & 0 \leq \lambda \leq 1, i = 1, \dots, n - 1 \\ a'_i x &= b_i, & i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

Como x es una combinación convexa de puntos en P , x también pertenece a P , luego puede ser representado por:

$$x \in \{z \in P \mid a'_i z = b_i, i = 1, \dots, n - 1\}$$

(b)

Sea x un punto extremo de Q . Luego, existen n restricciones l.i. activas en x , de las cuales $a'_Q x = b_Q$ es una de ellas. Luego, existen al menos $n - 1$ restricciones de P activas en x , las cuales son l.i. por el supuesto de rango completo.

Si la restricción de Q es l.d. con las de P , implica que las n restricciones activas en x eran todas de P , por lo que x es un punto extremo de P .

De lo contrario, sean $a'_i x \geq b_i, i = 1, \dots, n$ las restricciones de P , donde:

$$a'_i x = b_i, i = 1, \dots, n - 1$$

Sean u y v dos puntos extremos adyacentes de P que satisfacen:

$$a'_i u = a'_i v = b_i, i = 1, \dots, n - 1$$

Luego, por la parte (a) podemos escribir x como:

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Por lo que es una combinación convexa

Problema 4

Como $P = \{x \in R^n : a_i x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ es no vacío y $\langle \{a_i\}_{i=1}^m \rangle = R^n$, entonces P tiene un vértice.

Como $P = \{x \in R^n : g_i x \geq h_i, i = 1, \dots, k\}$, y P tiene un vértice, necesariamente el conjunto de restricciones que lo define contiene un conjunto l.i. de tamaño n , por lo que $\langle \{g_i\}_{i=1}^k \rangle = R^n$.

Problema 5

Variables: (0,25 pts. c/u)

$$X_{jkt} = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce producto } j \text{ con el proceso } k \text{ en } t \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$Z_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso proceso } k \text{ en } t \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Q_{jt} = Cantidad (litros) de producto j a producir en t

W_t = Cantidad (litros) por los que me paso de Q^* en t

Nota de corrección: Es posible trabajar la variable Q con otras unidades, no hay mucho problema pero tendrán que dividir o multiplicar por 1000 en algunas restricciones, por ejemplo. La variable W sin embargo debe ser en litros, después se explica por qué. En el enunciado se pedía un modelo para "encontrar la cantidad de litros a producir", por lo que trabajar en litros era la mejor opción. No se necesitan variables que digan cuántos insumos compro.

Restricciones:

1. Naturaleza de las variables: (0,3 pts)

$$X_{jkt}, Z_{kt} \in \{0,1\}$$

$$Q_{jt}, W_t \in \mathbb{N}$$

Nota de corrección: A priori se esperaba que usaran un Q entero, sin embargo y dado que el enunciado no era muy claro en ese tema, se acepta que sea una variable real.

2. "Sólo produzco si decidí producir": (0,4 pts.)

$$Q_{jt} \leq X_{jkt} * M \quad \forall j, k; M \gg 0$$

3. Relación entre X y Z : (0,4 pts.)

$$X_{jkt} \leq Z_{kt} \quad \forall j, k; M \gg 0$$

4. Debo elegir un sólo proceso k : (0,4 pts.)

$$\sum_k Z_{kt} = 1 \quad \forall t$$

5. Si elijo proceso k en t , en $t+1$ debo elegir proceso compatible: (0,4 pts.)

$$Z_{kt} + Z_{k',t+1} \leq 1 + V_{kk'} \quad \forall k, k', t$$

6. Capacidad máxima de insumos a pedir: (0,4 pts.)

$$\sum_j Q_{jt} * a_{ij} \leq CAP_i \quad \forall i$$

Nota de corrección: Ojo con las unidades, si usaron unidades distintas tendrán que dividir por algo el término de la izquierda. Lo mismo para todas las restricciones con Q.

7. Definición de W (va aumentando de acuerdo a cantidad de litros): (0,4 pts.)

$$\frac{\sum_{i,j} Q_{jt} * a_{ij}}{1000} \leq \bar{Q} + W_t \quad \forall t$$

Nota de corrección: Dividimos en 1000 para que quede en litros. El costo adicional se cobra por cada litro. Se asume implícitamente que si se llevan 4,5 litros, deben redondear hacia arriba y pagar los 5 litros extra en costo. Es por esto que W se define como entera.

8. Presupuesto para insumos: (0,4 pts.)

$$\sum_{i,j} Q_{jt} * a_{ij} * C_i + (1 + W_t * \frac{TASA}{100}) * CT \leq PPTO \quad \forall t$$

Nota de corrección: Si no agregan el término del costo de transporte está bien, pues depende de cómo interpreten la línea del enunciado.

9. No producir Marshello y Crepúsculo juntos: (0,4 pts.)

$$X_{MARSHELLO,k,t} + X_{CREPUSCULO,k,t} \leq 1 \quad \forall k,t$$

10. Caldo y Rosas van juntos si es que van: (0,4 pts.)

$$X_{CALDO,k,t} = X_{ROSAS,k,t} \quad \forall k,t$$

11. ZMRR >= 25% del total de la producción: (0,4 pts.)

$$Q_{ZMRR,t} \geq 0.25 * \sum_j Q_{j,t} \quad \forall t$$

Nota de corrección: Es válido si en esta última suman sobre t en vez de hacerlo para todo t.

Función objetivo: (0,7 pts)

$$\max \left\{ \sum_{j,t} P_j * (Q_{jt} * 10) - \sum_{i,j,t} Q_{jt} * a_{ij} * C_i - (1 + W_t * \frac{TASA}{100}) * CT - \sum_{j,k,t} X_{jkt} * CP_{jkt} \right\}$$

Dudas y/o Comentarios a:
Nelson Devia
ndevia@ing.uchile.cl