INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti.
Auxiliares: Víctor Bucarey, Charles Thraves, Nelson Devia, Alfredo Torrico.
Coordinador: Nicolás Padilla.

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Pauta Auxiliar 2

24 de Marzo de 2011

P1.

- **Variables de decisión:**
  (a) x_{ijg} : cantidad de alumnos del vecindario i que va a la escuela j en el nivel g.
- **Restricciones:**
  (a) La cantidad de alumnos en un nivel no puede sobrepasar la capacidad total,

$$\sum_{i \in I} x_{ijg} \leq C_{jg} \qquad \forall j \in J, g \in G$$

  (b) Debo asignar a todos los alumnos de los vecindarios en su nivel,

$$\sum_{j \in J} x_{ijg} = S_{ig} \qquad \forall i \in I, g \in G$$

- **Función Objetivo:**

$$\min \sum_{i,j} \left(\sum_{g \in G} x_{ijg} \right) d_{ij}$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ijg} \geq 0 \quad \forall i, j, g$$

P2.

- **Variables de decisión:**
  (a) x_{ij}: 1 si se conecta i con j, 0 si no.
- **Restricciones:**
  (a) Cada conexión debe tener sólo una "entrada":

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

  (b) Cada conexión debe tener sólo una "salida":

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

  (c) No debo tener ciclos disjuntos (subtour elimination):
  FORMA 1

$$\forall \emptyset \neq S \subset \{1, \ldots, N\}, \qquad \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1$$

  FORMA 2

$$\forall \emptyset \neq S \subset \{1, \ldots, N\}, |S| \geq 2 \qquad \sum_{i \neq j; i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$$

  FORMA 3 (sequential formulation)
  Definimos variables adicionales

$$u_i : \text{número de la secuencia en que } i \text{ fue visitado,}$$

  entonces la restricción es:

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall i \neq j \in \{2, \ldots, N\}$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in \{2, \ldots, N\}$$

- **Función Objetivo:**

$$\min \sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j$$

P3.

- **Variables de decisión:**
  - x_{ij} : 1 asigno al distrito i una estación de bomberos en j, 0 si no.
  - y_j : 1 si la estación se construye en j, 0 si no.
  - s_j : cantidad de gente atendida por la estación j.
  - z : distancia máxima entre un distrito y una bomba.
- **Restricciones:**

(a) Cada distrito debe tener sólo una estación:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I$$

(b) La estación j se construye sólo si fue asignada:

$$y_j \geq x_{ij} \qquad \forall i,j$$

(c) Respetar presupuesto:

$$\sum_{j} y_j c_j + f s_j \leq B$$

(d) Cantidad de gente que debe ser servida por cada bomba:

$$s_j = \sum_{i} x_{ij} p_i \qquad \forall j$$

(e) Establecer la máxima distancia recorrida

$$z \geq x_{ij} d_{ij} \qquad \forall i,j$$

- **Función Objetivo:**

$$\min z$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \quad \forall i,j$$

$$s_j, z \geq 0$$

P4.

- **Variables de decisión:**
  - x_{im} : 1 si se asgina la promoción i al mes m, 0 si no.
  - y_{im} : cantidad de personal asignado a la promoción i en el mes m.
- **Restricciones:**

(a) Respetar el presupuesto anual:

$$\sum_{i,m} x_{im} b_{im} \leq B$$

(b) Cantidad máxima de empleados a utilizar en cada mes:

$$\sum_{i} y_{im} \leq H_m \qquad \forall m$$

(c) Sólo asigno personal a la promoción i si ésta fue asignada al mes m:

$$y_{im} \leq Cx_{im} \qquad \forall i, m$$

donde C es una constante mucho mayor que 1. En este caso el máximo valor que puede tomar C es H_m.

(d) Cantidad máxima de promociones cada mes:

$$\sum_i x_{im} \leq n \qquad \forall m$$

- **Función Objetivo:**

$$\text{máx} \sum_{i,m} (x_{im} v f_{im} + y_{im} v u_{im}) + v_0$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{im} \in \{0, 1\} \quad \forall i, m$$
$$y_{im} \geq 0$$

P5.

- **Variables de decisión:**
  - x_{ij}: 1 si se asigna el camión i al cliente j, 0 si no.
  - y_{ik}: 1 si se asigna el camión i al cliente interurbano k, 0 si no.
- **Restricciones:**

(a) Capacidad de los camiones:

$$R_j x_{ij} \leq V_i \qquad \forall i, j$$

(b) Cada mudanza debe realizarse por un único flete:

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

(c) Cantidad máxima de fletes por camión:

$$\sum_j x_{ij} \leq L_i \qquad \forall i$$

(d) Clientes s y t deben ser atendidos por camiones diferentes:

$$x_{is} + x_{it} \leq 1 \qquad \forall i$$

(e) Clientes v y w deben ser atendidos por un mismo camión en viajes diferentes:

$$x_{iv} = x_{iw} \qquad \forall i$$

(f) Si un camión hace un viaje interurbano, entonces no realiza más flete durante el día:

$$\sum_j x_{ij} \leq L_i(1 - y_{ik}) \qquad \forall i, k$$

(g) Sólo es un viaje interurbano:

$$\sum_k y_{ik} \leq 1 \qquad \forall i$$

- **Función Objetivo:**

$$\text{máx} \sum_{ij} B_{ij} x_{ij} + \sum_i \sum_{k=1}^{3} y_{ik}(B + bD_k)$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k$$

P6. **(a)**

- **Variables de decisión:**
  - x_{kt} : cantidad producida para la familia k en el período t.
  - y_{kt} : cantidad inventario en la bodega propia para el tipo k al termino del período t.
  - z_{kt} : cantidad inventario en la bodega de terceros para el tipo k al termino del período t.
- **Restricciones:**

  i) Capacidad de producción:
  $$\sum_k a_k x_{kt} \leq A_t \qquad \forall t$$

  ii) Flujo de Producción:
  $$y_{k,t-1} + z_{k,t-1} + x_{k,t} = d_{k,t} + y_{k,t} + z_{k,t} \qquad \forall k, t$$

  iii) Capacidad de Bodega:
  $$\sum_k y_{kt} \leq B \qquad \forall t$$
- **Función Objetivo:**
  $$\text{mín} \sum_{k,t} (b_{kt} y_{kt} + g_{kt} z_{kt})$$
- **Naturaleza de las variables:**
  $$x_{kt}, y_{kt}, z_{kt} \geq 0 \quad \forall k, t$$

(b) Si el modelo que se obtuvo en la parte anterior se mantiene, más la condición que $g_{kt} < b_{kt}$, entonces se comenzarían a ocupar primero las bodegas de terceros, y como tienen capacidad infinita nunca se usarían las bodegas propias. Dado esto, hay que imponer un par de restricciones con el objetivo de llenar las bodegas propias primero. Supongamos que

$$y_t : \text{inventario bodega propia en } t \text{ para cualquier producto}$$

$$z_t : \text{inventario bodega de terceros en } t \text{ para cualquier producto}$$

$$\delta_t : 1 \text{ si } y_t = B, 0 \text{ si } y_t < B$$

Dado esto, las nuevas restricciones son

$$(B - y_t) \leq (1 - \delta_t) C_1$$

donde C_1 es una constante mucho mayor que 1. Esto funciona ya que si $\delta_t = 1$, entonces $y_t \geq B$, y por las condiciones del problema original se tiene $y_t = B$. Por último agregamos la siguiente restricción,

$$z_t \leq \delta_t C_2$$

donde C_2 es una constante mucho mayor que cero, y se obliga a que $z_t \geq 0$ cuando $\delta_t = 1$ (es decir, la variable z_t se "libera").