

La Geometría de la Programación Lineal

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 2

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Se dice que un conjunto S en \mathbb{R}^n es un poliedro si puede ser representado como un conjunto finito de inecuaciones lineales:
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b\}$$

- Donde A es una matriz de $m \times n$, b es un vector en \mathbb{R}^m y m es la cantidad de inecuaciones.

- La región factible de todo Problema de Programación Lineal (PPL) puede ser descrita por restricciones de desigualdad de la forma $Ax \geq b$ y, por lo tanto, es un poliedro.

- Notar que un poliedro, equivalentemente, se puede definir:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$$

Ejemplo: Poliedro en R

- Consideremos las siguientes desigualdades:

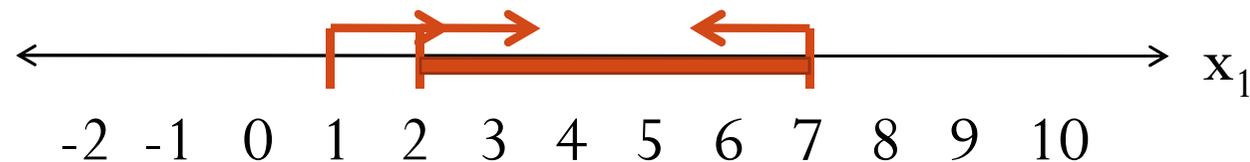
$$4x_1 \geq 8$$

$$-x_1 \geq -7$$

$$x_1 \geq 1$$

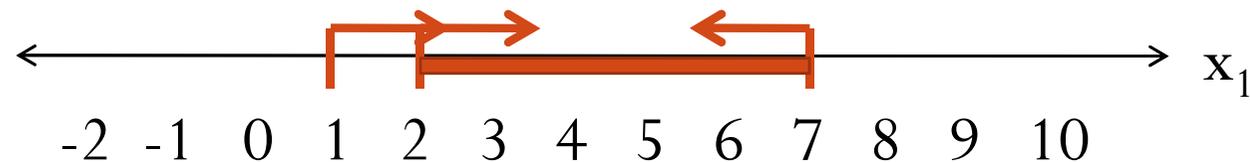
- En este caso tenemos $n = 1$, $m = 3$, $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Gráficamente:



Ejemplo: Poliedro en R

- De la primera desigualdad tenemos que: $x_1 \geq 2$
- De la segunda desigualdad tenemos que: $x_1 \leq 7$
- De la tercera desigualdad tenemos que: $x_1 \geq 1$
- Luego el poliedro representado con estas desigualdades es el siguiente:



Ejemplo: Poliedro en \mathbb{R}^2

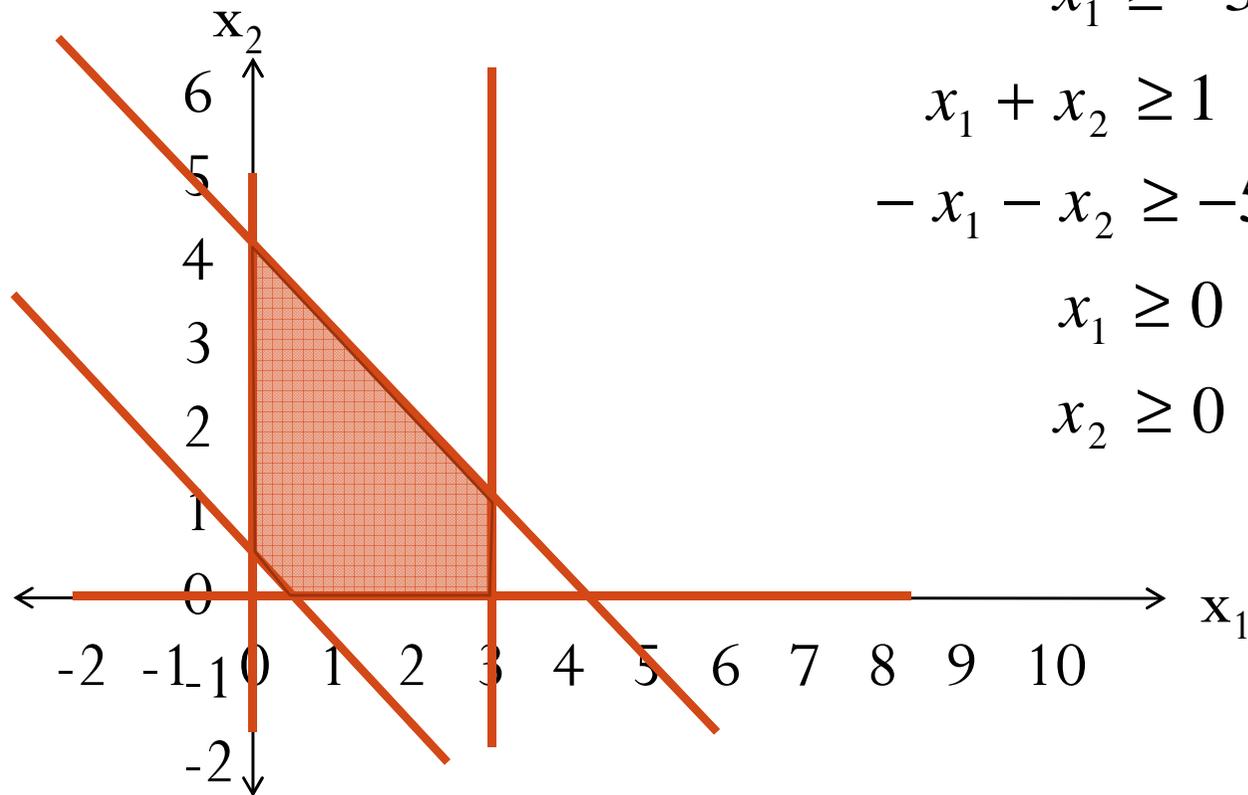
- Consideremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{l} -x_1 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 \geq -5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En este caso tenemos $n = 2$, $m = 5$

Ejemplo: Poliedro en \mathbb{R}^2

- Gráficamente:



$$\begin{aligned} -x_1 &\geq -3 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 - x_2 &\geq -5 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: Poliedro en \mathbb{R}^3

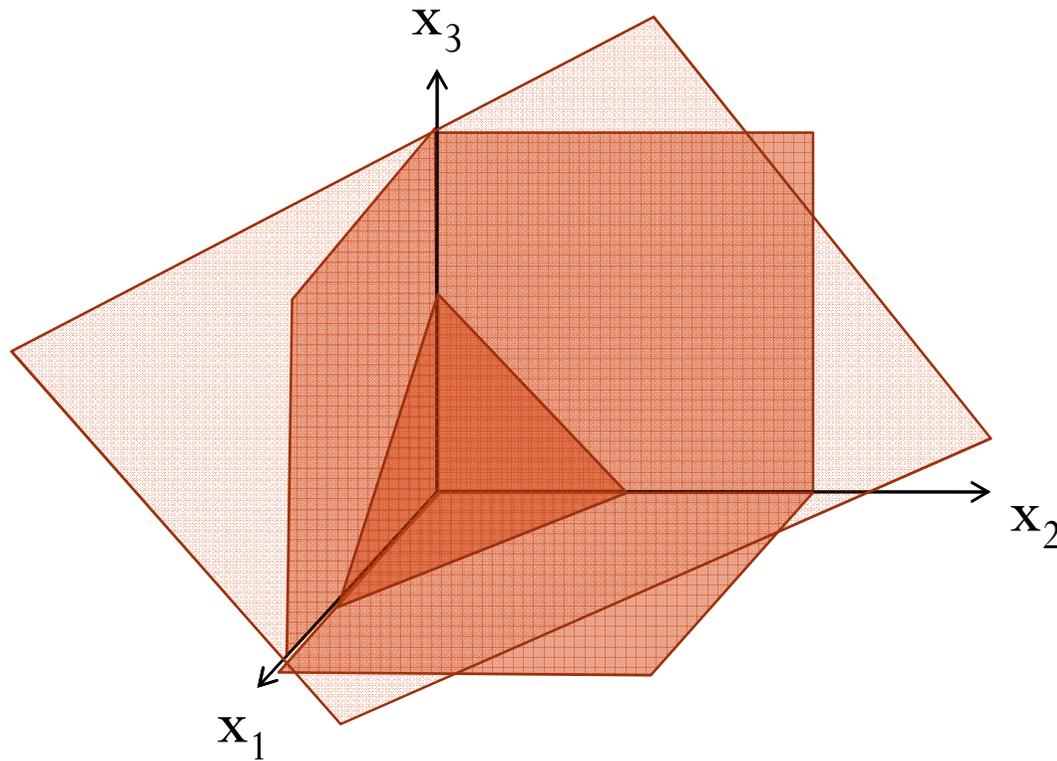
- Consideremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- En este caso tenemos $n = 3$, $m = 4$

Ejemplo: Poliedro en \mathbb{R}^3

- Gráficamente:



$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Casos Particulares

- **Hiperplano**

- Es un poliedro determinado por una única restricción de igualdad.

$$\{x \in R^n / a'x = b\}$$

- **Semiespacio**

- Es un poliedro determinado por una única restricción de desigualdad.

$$\{x \in R^n / a'x \geq b\}$$

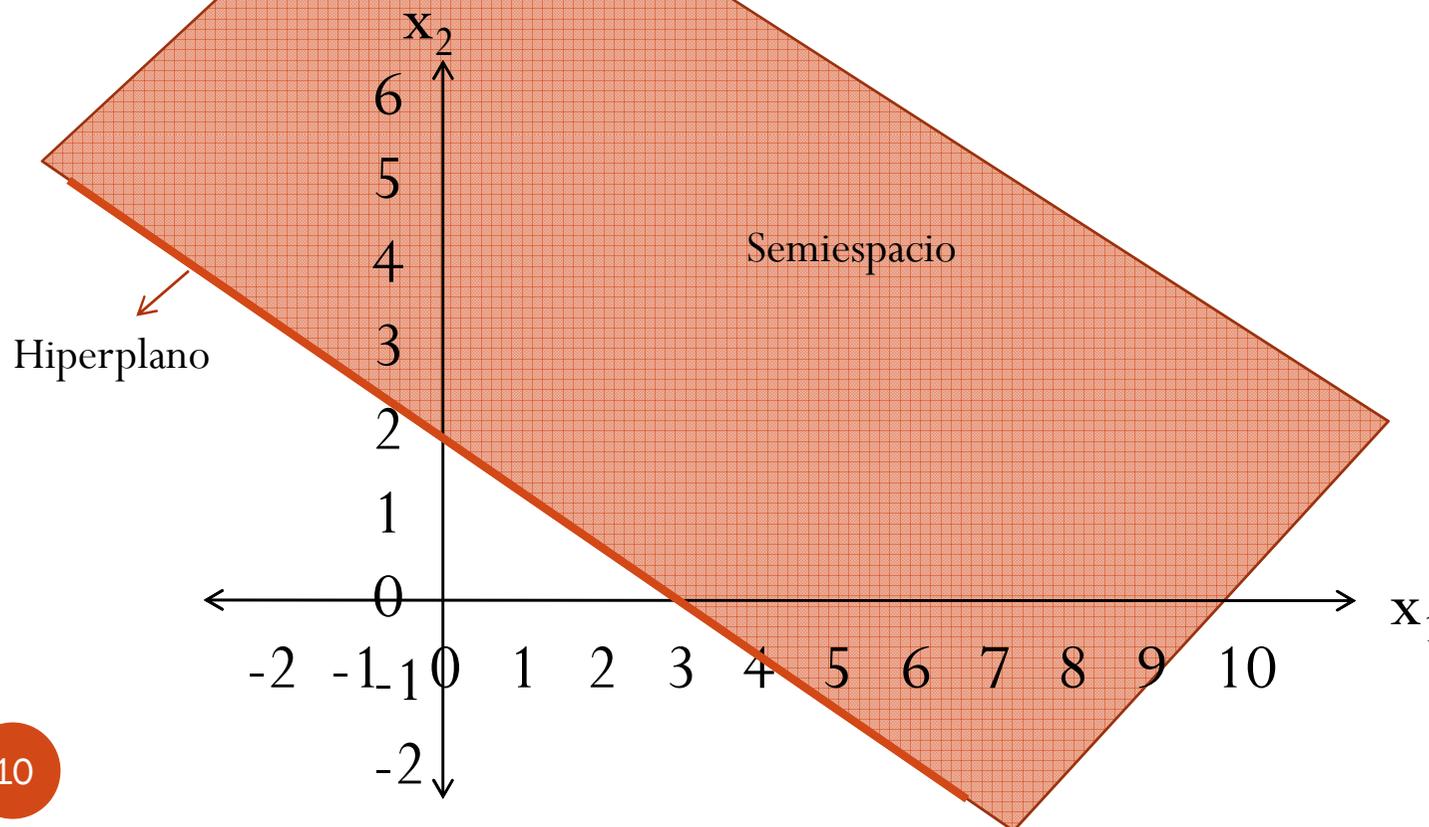
- Notar que todo semiespacio está limitado por el hiperplano correspondiente.

Casos Particulares

- Ejemplo:

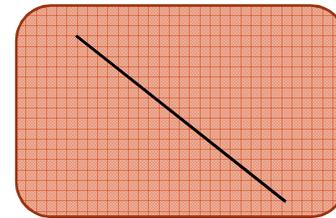
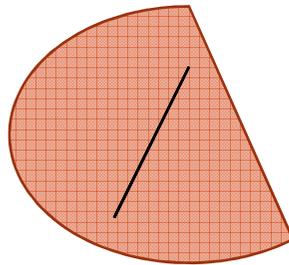
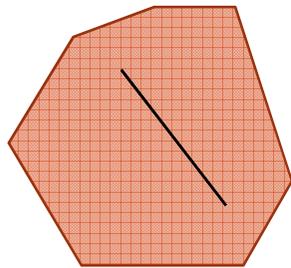
- Hiperplano: $\{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + 3x_2 = 6\}$

- Semiespacio: $\{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + 3x_2 \geq 6\}$

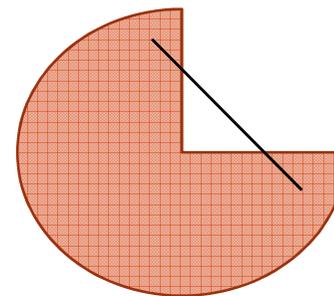
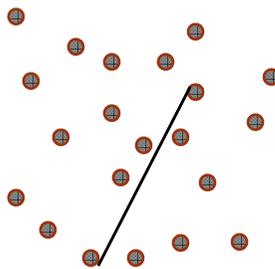
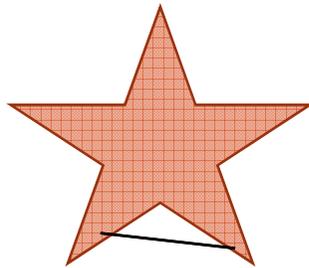


Conjuntos Convexos

- Un conjunto es convexo si, para cualquier par de puntos en él, la recta que los une está contenida en el conjunto.
- Ej: Conjuntos Convexos:



- Ej: Conjuntos No Convexos:

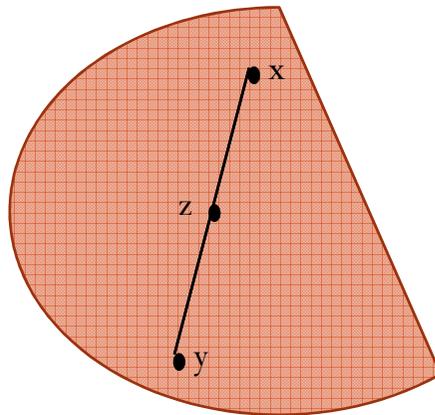


Conjuntos Convexos

- Un conjunto es convexo si, para cualquier par de puntos en él, la recta que los une está contenida en el conjunto.

- Formalmente: Un conjunto S es convexo si:

$$\forall x, y \in S, \lambda \in [0,1], \quad z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$



- Se dice que z es una combinación lineal convexa de x e y .

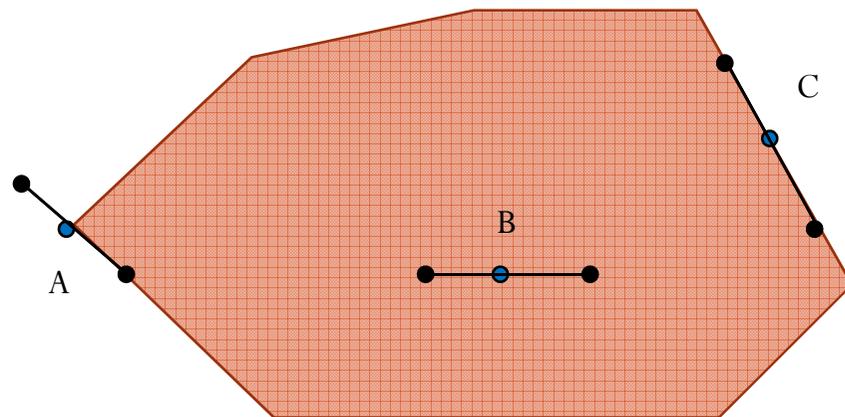
Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- **Punto Extremo:**

- Un punto extremo es aquel que no puede ser expresado como una combinación lineal convexa de otros dos puntos del poliedro.
- Formalmente: x es un punto extremo de P si no existen:

$$y, z \in P \setminus \{x\}, \lambda \in [0,1], \quad x = \lambda y + (1 - \lambda)z$$

- A es un punto extremo
- B no es un punto extremo
- C no es un punto extremo



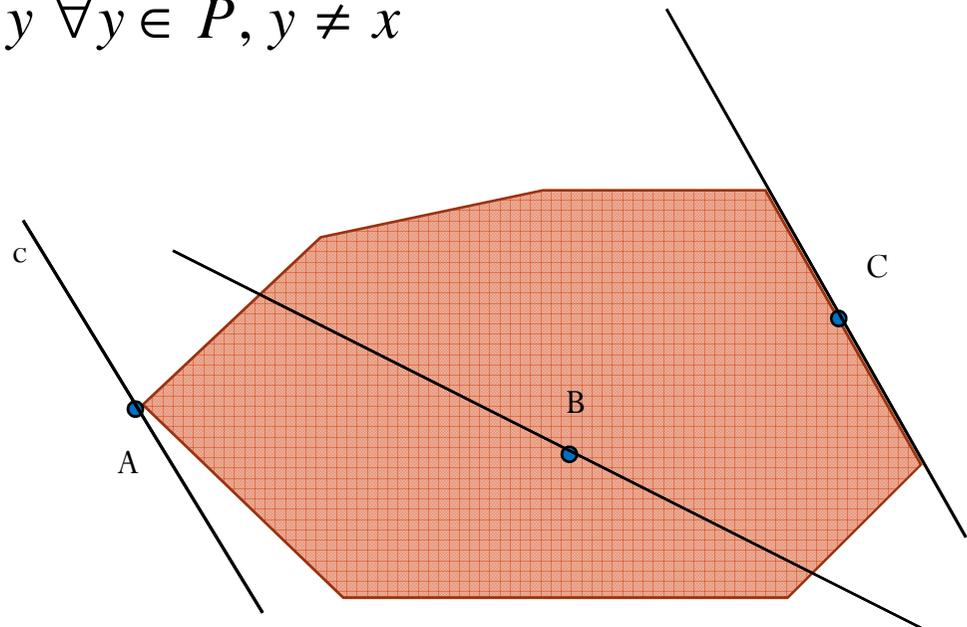
Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- **Vértice**

- Un punto x es un vértice de un poliedro P , si existe una recta que intersecte a P sólo en el punto x .
- Formalmente: x es un vértice de P si:

$$\exists c / c'x < c'y \quad \forall y \in P, y \neq x$$

- A es un vértice
- B no es un vértice
- C no es un vértice



Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

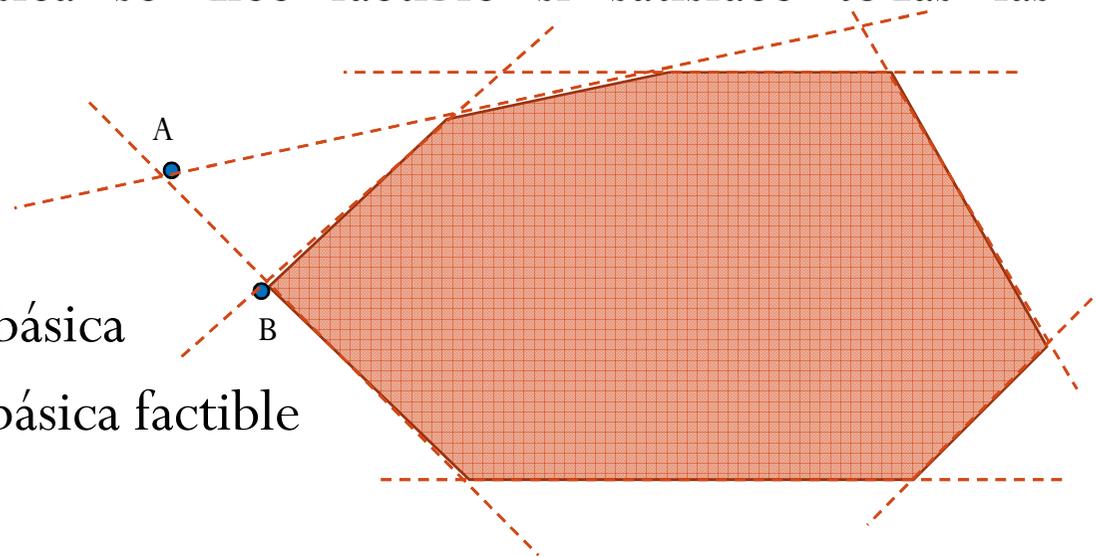
- **Solución Básica:**

- Un punto x es una solución básica de un poliedro P en \mathbb{R}^n si corresponde a la intersección de n restricciones linealmente independientes.

- **Solución Básica Factible:**

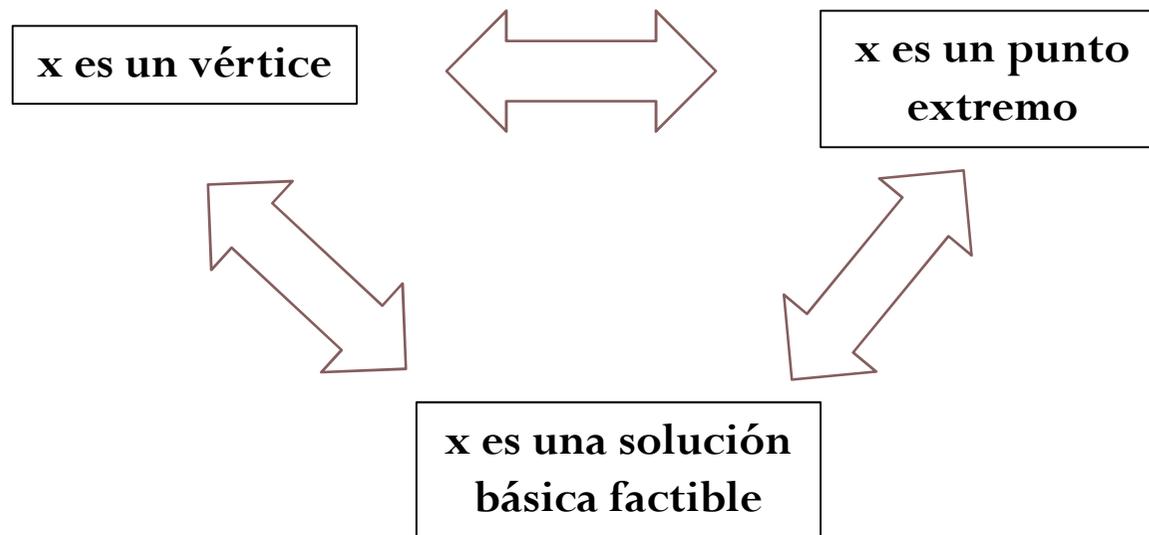
- Una solución básica se dice factible si satisface todas las restricciones.

- A es una solución básica
- B es una solución básica factible



Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- Sea P un poliedro no vacío y x un punto de P , son equivalentes:



Restricciones Activas

- **Restricción Activa:** Se dice que una restricción es activa en un punto x^* si se cumple con igualdad en ese punto.
- Ej: La restricción $a'_i \cdot x \leq b_i$ es activa en x^* si $a'_i \cdot x^* = b_i$
- **Conjunto Activo:** Es el conjunto de todas las restricciones activas en el punto x^* .

$$I = \{i / a'_i \cdot x^* = b_i\}$$

Teorema

- Sea x^* en \mathbb{R}^n e I el conjunto activo de x^* , entonces lo siguiente es equivalente:
 - Existen n restricciones l.i. que pasan por x^* (pertenecen a I).
 - Los coeficientes de las restricciones activas determinan vectores (filas en la matriz) que generan el espacio \mathbb{R}^n .
 - El sistema de ecuaciones de todas las restricciones activas tiene una solución única.

Poliedro en Forma Estándar

- Un poliedro en forma estándar es aquel que puede ser representado:
 - Sólo con restricciones de igualdad
 - Sólo con variables no negativas
 - Es decir: $P = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$
 - Donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un vector en R^m
- Notar que todo poliedro puede ser escrito en forma estándar
 - Agregando variables de holgura
 - Reemplazando variables negativas y libres

Poliedro en Forma Estándar

- Ejemplo:

- Sea P el siguiente poliedro:

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 9x_2 - 2x_3 \geq 10$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

- Agregamos las variables de holgura (positivas):

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 6$$

$$x_4 \geq 0$$

$$-x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_5 = 10$$

$$x_5 \geq 0$$

- Reemplazamos las variables no positivas:

$$x_1' = -x_1$$

$$x_1' \geq 0$$

$$x_3' - x_3'' = x_3$$

$$x_3', x_3'' \geq 0$$

Poliedro en Forma Estándar

- Ejemplo:

- Sea P el siguiente poliedro:

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 9x_2 - 2x_3 \geq 10$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \in R$$

- Obtenemos el poliedro en forma estándar P':

$$-2x_1' + 3x_2 - 5x_3' + 5x_3'' + x_4 = 6$$

$$x_1' + 9x_2 - 2x_3' + 2x_3'' - x_5 = 10$$

$$x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 6$$

$$-x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_5 = 10$$

$$x_1 = -x_1'$$

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

$$x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$$

- O, equivalentemente:

Poliedro en Forma Estándar

- Notar que un poliedro en forma estándar tiene n variables (incluidas las variables de holgura) y $(n+m)$ restricciones (incluyendo las restricciones de no negatividad).

- Ejemplo:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

- En este caso se tiene $n=5$ y $m=3$.

Soluciones Básicas

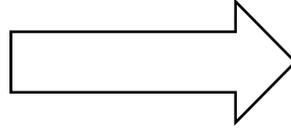
- Sin pérdida de generalidad se asume que las m restricciones son linealmente independientes, lo que implica que $m \leq n$
- Recordemos que para que un punto sea solución básica debe ser la intersección de n restricciones l.i. (n restricciones activas)
 - Como ya se tienen m restricciones de igualdad ($Ax = b$), faltan $(n-m)$ restricciones activas, que se logran escogiendo $(n-m)$ variables y fijándolas en 0, haciendo que las correspondientes restricciones $x_i \geq 0$ sean activas.

Soluciones Básicas

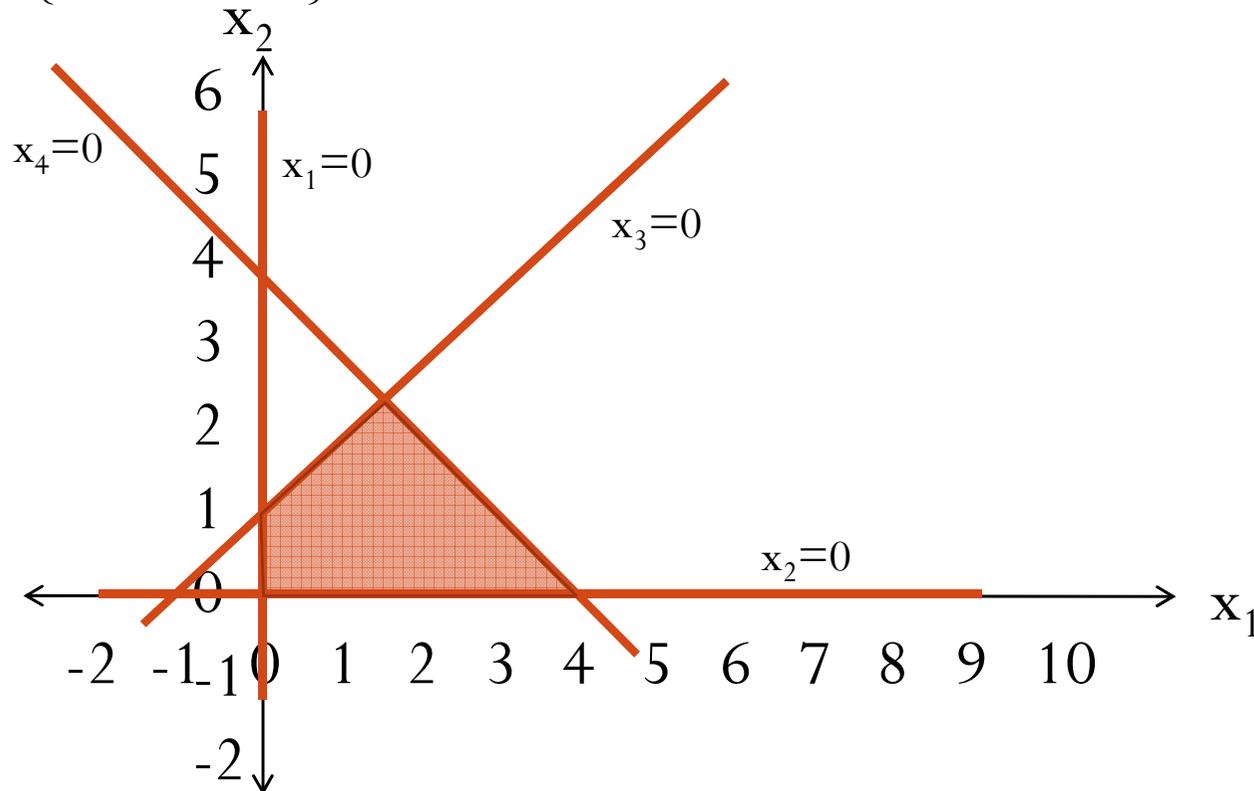
- Ejemplo:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Estándar



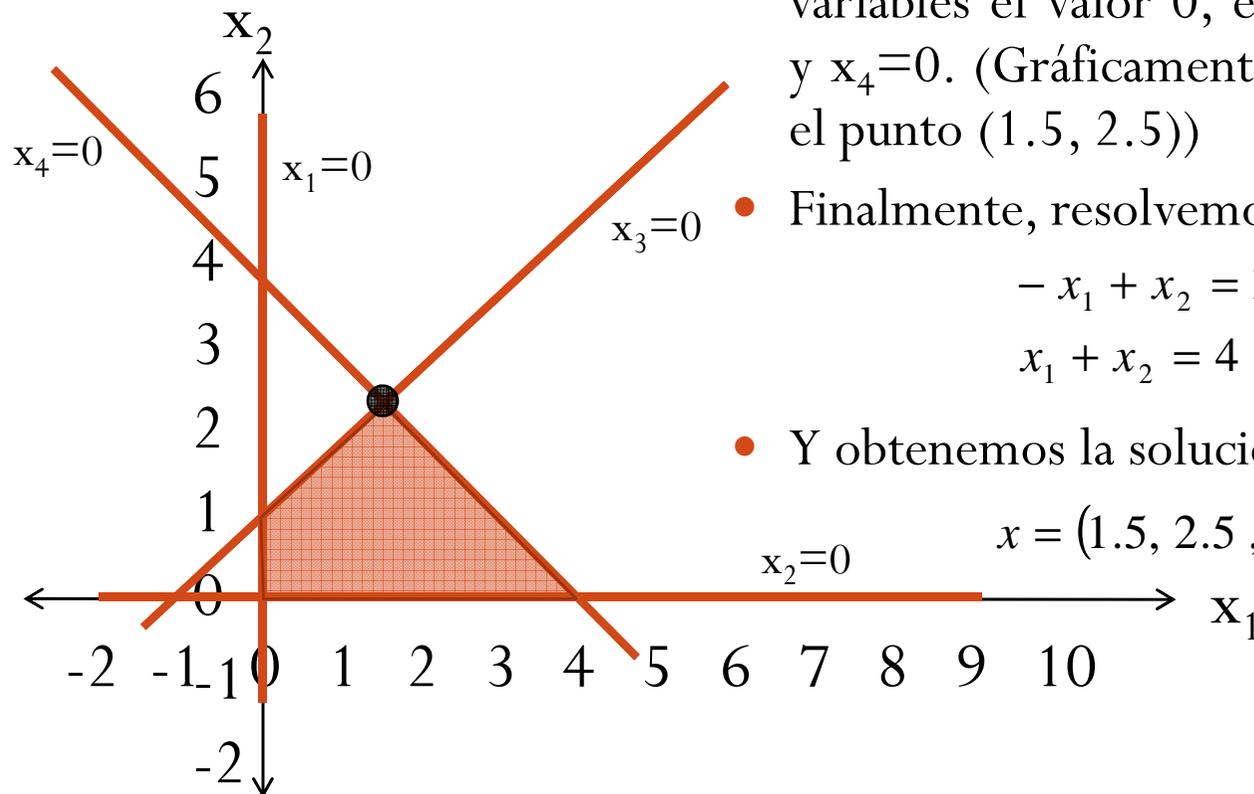
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



Soluciones Básicas

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- Elegimos arbitrariamente las primeras 2 columnas (asociadas a x_1 y x_2) que son l.i.
- Luego asignamos a todas las demás variables el valor 0, es decir $x_3=0$ y $x_4=0$. (Gráficamente estamos en el punto $(1.5, 2.5)$)

- Finalmente, resolvemos el sistema:

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

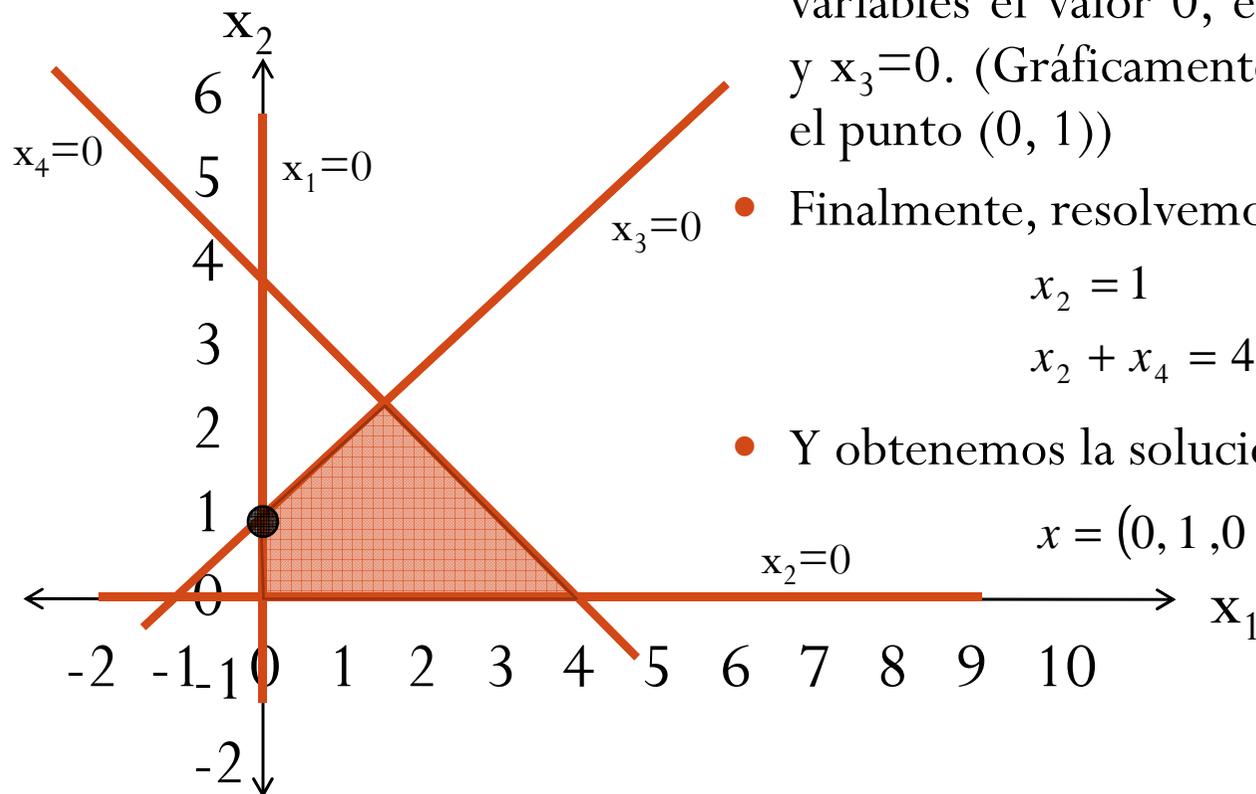
- Y obtenemos la solución básica

$$x = (1.5, 2.5, 0, 0)$$

Soluciones Básicas

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- Si, en cambio, elegimos las columnas 2 y 4 (asociadas a x_2 y x_4) que son l.i.
- Luego asignamos a todas las demás variables el valor 0, es decir $x_1=0$ y $x_3=0$. (Gráficamente estamos en el punto $(0, 1)$)

- Finalmente, resolvemos el sistema:

$$x_2 = 1$$

$$x_2 + x_4 = 4$$

- Y obtenemos la solución básica

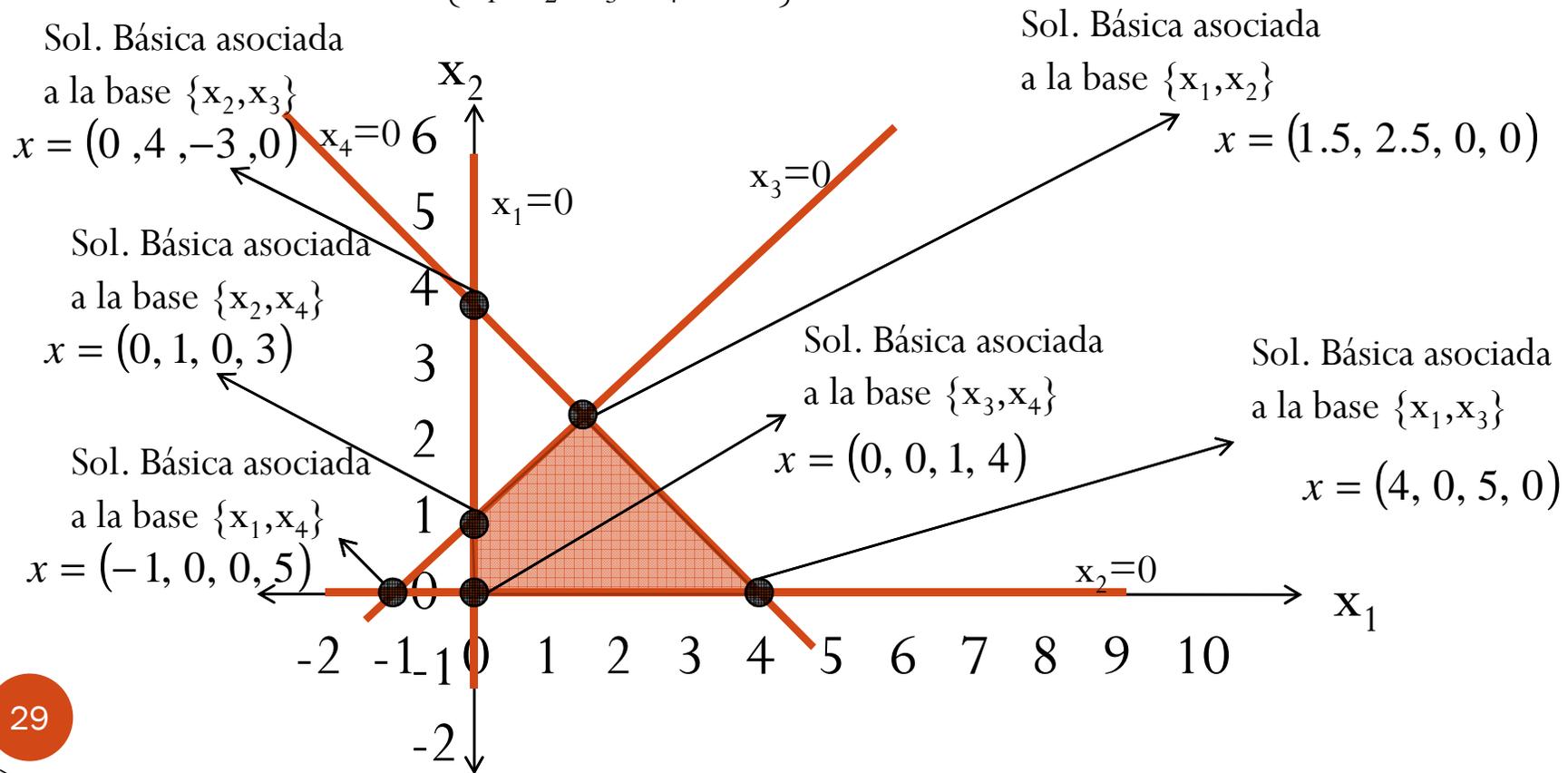
$$x = (0, 1, 0, 3)$$

Soluciones Básicas

- En resumen:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- Esto puede hacerse escogiendo cualquier par de columnas l.i. de la matriz A.

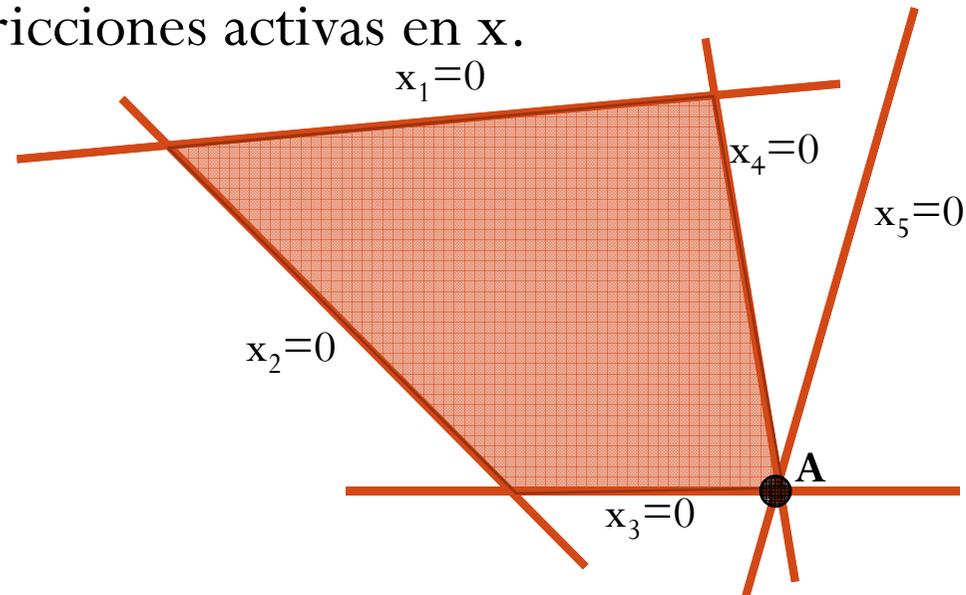


Soluciones Básicas

- Una base está asociada a una única solución básica, mientras que una solución básica puede ser representada por más de una base.
- Si se da este último caso, decimos que la solución básica es degenerada.

Degenerancia

- Una solución básica x se dice **degenerada** si hay más de n restricciones activas en x .



- En este caso, el punto A es una solución básica degenerada y puede representarse con las bases:

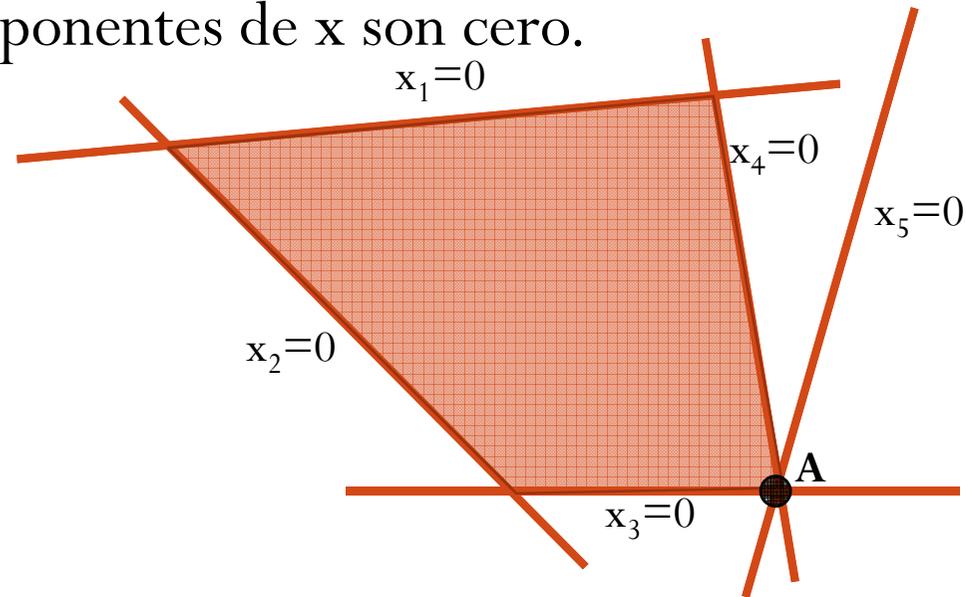
$$B_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$B_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$$

$$B_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$$

Degenerancia

- Una solución básica x se dice **degenerada** si más de $(n-m)$ componentes de x son cero.



- En este caso, el punto **A** es una solución básica degenerada porque tiene 5 variables, 3 restricciones* y más de 2 variables nulas: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$

- * Como estamos en \mathbb{R}^2 , las restricciones $x_1, x_2 \geq 0$ no se cuentan dentro de las m restricciones del tipo $Ax = b$

La Geometría de la Programación Lineal

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

“Introduction to Linear Optimization”

Chap. 2

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.