

Optimización de gran escala

Daniel Espinoza, Dpto. Ingeniería Industrial

Universidad de Chile

7 de marzo de 2011

Contenidos

1 Optimización a gran escala

Motivación

- Hasta ahora hemos desarrollado teoría y algoritmos para resolver problemas del tipo $(P) : \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
- Hay casos donde A no cabe en memoria, pero donde (P) puede ser resuelto a optimalidad.
- ¿Qué podemos hacer cuando n es demasiado grande?
 - Hay razones prácticas y teóricas para evaluar sub-conjunto de variables.
 - Éstas técnicas se llaman **generación de columnas**.
- ¿Qué podemos hacer cuando m es demasiado grande?
 - Esta puede verse como la situación dual a la anterior.
 - Mismos métodos sirven, en este contexto se llaman **generación de desigualdades**.
- Veremos algunas aplicaciones a estas técnicas.

Generación de columnas :

- Consideramos $(P) : \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
 - Sea $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{rank}(A_I) = m$.
 - Consideremos $(P_I) : \min\{c_I x_I : A_I x_I = b, x_I \geq 0\}$.
 - Si (P_I) es no acotado, entonces (P) es no cotado.
 - Sea B base óptima de (P_I) .
 - Note que B es base factible para (P) .
 - Bajo qué condiciones B es base óptima de (P) ?
 - Basta verificar que $(S) : \min\{\bar{c}_i : i = 1, \dots, n\} \geq 0$.
 - (S) se llama **problema de pricing**.
 - Hay muchos casos donde (S) puede resolverse sin tener que evaluar cada $\bar{c}_i$.
 - Si no, sea $i_o = \arg\min_S$, podemos redefinir $I \leftarrow I \cup \{i_o\}$ e iterar.
- Podría descartar de I la variable básica que sale de la base.
- Podría agregar algún i tal que $\bar{c}_i < 0$, o más de uno.
- Este esquema puede verse como una versión especial del método de simplex.
- El algoritmo termina bajo las mismas condiciones que simplex.
 - ¿Bajo qué condiciones podemos detenernos antes de terminar?

Un Ejemplo:

Cutting Stock Problem

Considere el problema de una firma que produce rollos de papel de una dimensión uniforme L , pero que recibe demanda de d_i rollos de ancho L_i para $i \in I$.

El problema es minimizar las pérdidas de material (trozos sobrantes) pero satisfaciendo la demanda.

- Una alternativa es definir una variable por rollo a cortar, y por posibles elementos en cada rollo.
- Muchas variables y mucha simetría
 - ¿Por qué simetría es un problema?
- Formulación Alternativa:
 - Definir una variable entera por cada posible es esquema de corte.
 - Bastan variables por esquemas de cortes **maximales**.
 - Pocas restricciones, muchas variables.
 - ¿Cómo identificamos una nueva variable a considerar?

Generación de restricciones:

- Consideramos $(P) : \max\{cx : a_i x \leq b_i, \forall i \in N\}$.
 - Sea $I \subseteq N$ y definimos $(P_I) : \max\{cx : a_i x \leq b_i, \forall i \in I\}$.
 - Claramente $z_{P_I} \geq z_P$.
 - Si $x_{P_I}^*$, solución óptima de P_I , es factible para P , entonces es la solución óptima de P .
 - Si $x_{P_I}^*$ es infactible, agregar alguna restricción violada a I .
 - ¿Cuál es la interpretación gráfica de lo que hacemos?
 - ¿Cuál de todas agregar?
 - Usualmente se resuelve $(S) : \min\{b_i - a_i x_{P_I}^* : i \in N\}$.
 - (S) se llama **problema de separación**.
 - Factibilidad de $x_{P_I}^*$ es equivalente a $z_S \geq 0$.
 - En algunos casos, el problema (S) puede resolverse sin enumeración.
 - Esto puede interpretarse como generación de columnas en el dual de P .
- ¿Por qué funciona en la practica?
 - Pocas restricciones son activas en el óptimo o pocas variables son no-cero en el óptimo.

Descomposición de Dantzig-Wolfe

• Consideramos (P) : $\min \left\{ \begin{array}{lcl} & D_1x_1 + D_2x_2 & = b_0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 : & F_1x_1 & = b_1 \\ & F_2x_2 & = b_2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right\}$

- Podemos pensar que este modelo representa una firma con dos unidades que comparten algunos recursos comunes b_0 .
- Si $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, típicamente $m_0 \ll m_i$ para $i = 1, 2$.
- Definiendo $P_i = \{x_i : F_i x_i = b_i\}$, $i = 1, 2$, podemos re-escribir:

$$(P) : \min \left\{ \begin{array}{lcl} c_1x_1 + c_2x_2 : & D_1x_1 + D_2x_2 & = b_0 \\ & x_i & \in P_i \end{array} \right\}$$

- Sean $\{v_j^i\}_{i \in V_j}$ y $\{w_j^i\}_{i \in R_j}$ los puntos y rayos extremos de P_j .
- Podemos re-escribir

$$(P') : \min \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j,i \in V_j} c_j v_j^i \lambda_j^i + \sum_{j,i \in R_j} c_j w_j^i \theta_j^i : & & \\ \sum_{j,i \in V_j} D_j v_j^i \lambda_j^i + \sum_{j,i \in R_j} D_j w_j^i \theta_j^i & = & b_0 \\ \sum_{i \in V_j} \lambda_j^i & = & 1 \quad j = 1, 2 \\ \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

Descomposición de Dantzig-Wolfe

- Consideramos

$$(P) : \min \left\{ \begin{array}{ll} c_1 x_1 + c_2 x_2 : & \begin{array}{ll} D_1 x_1 + D_2 x_2 & = b_0 \\ F_j x_j & = b_j, \quad j = 1, 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

- (P') y (P) son equivalentes.
- El problema resultante tiene sólo $m_0 + 2$ restricciones.
- ... pero $|V_j|, |R_j|$ pueden ser muy grandes.
- ... y si usamos generación de columnas?
- Sea $y^t = (q^t, r_1, r_2)$ una solución dual óptima de (P') en un sub-conjunto de V_j, R_j .
- El costo reducido de λ_j^i es $c_j v_j^i - q^t D_j v_j^i - r_j = (c_j - q^t D_j) v_j^i - r_j$.
- El costo reducido de θ_j^i es $(c_j - q^t D_j) w_j^i$.
- Llamamos $c_j - q^t D_j = \bar{c}_j$ el costo modificado en P_j .
- Basta resolver entonces $(P_j) : \min \{ \bar{c}_j x_j : x_j \in P_j \}$.
- Si (P_j) es no acotado, encontramos w_j^i que agregar al problema.
- Si $z_{P_j} < r_j$, encontramos v_j^i que agregar al problema.
- Si no, solución es óptima en (P) .
- Podemos terminar antes? ¿Con qué garantías?