

Geometría y Poliedros

Daniel Espinoza, Dpto. Ingeniería Industrial

Universidad de Chile

7 de marzo de 2011

Contenidos

1 Elementos básicos de poliedros y conjuntos convexos

¿Por qué geometría?

Consideremos el Problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -x_1 - x_2 & (P) \\ \text{st.} & x_1 + 2x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- ¿Cómo es su región factible?
- ¿Qué puntos podrían ser óptimos?
- ¿Podemos descartar algunos puntos óptimos?
- ¿Qué tan importante es considerar objetivos lineales?

Definición 2.1

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **poliedro** si $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para algún $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Definición 2.2

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe $k \in \mathbb{R}_+$ tal que $\forall x \in S, \quad \|x\| \leq k$.

Definición 2.3

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, decimos que:

- 1 $S := \{x \in \mathbb{R}^n : ax = b\}$ es un **hiperplano**.
- 2 $S := \{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq b\}$ es un **semi-espacio**.

- Note que un hiperplano es la **frontera** de un semi-espacio.
- Si a define un hiperplano S , a es ortogonal a S .
- Un poliedro es la intersección **finita** de semi-espacios.

Definición 2.4

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in S, \lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.

- Equivalentemente, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo**, si $\forall \{x_j\}_{j=1}^k \subseteq S$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\sum(\lambda_i : i = 1, \dots, k) = 1$ se tiene que $y = \sum(x_i \lambda_i : i = 1, \dots, k) \in S$.
- y se dice una **combinación convexa** de $\{x_i\}_{i=1}^k$.

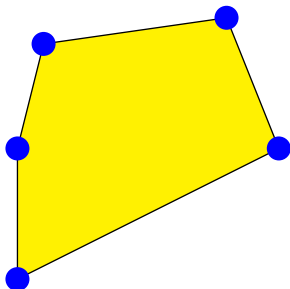
Definición 2.5

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos la **envoltura convexa** de S como $\text{conv_hull}(S) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists k \in \mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^k \subseteq S, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^+, \sum(\lambda_i : i = 1, \dots, k) = 1 \text{ tal que } y = \sum(\lambda_i x_i : i = 1, \dots, k)\}$.

- $\text{conv_hull}(S)$ es el conjunto convexo minimal que contiene S .
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si $S = \text{conv_hull}(S)$.

Teorema 2.1

- La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
 - Todo poliedro es un conjunto convexo.
 - Combinaciones convexas finitas de un conjunto convexo esta en el conjunto.
 - La envoltura convexa de un conjunto es un conjunto convexo.
-
- Consideremos un poliedro P y el problema $\max\{cx : x \in P\}$.
 - ¿Son todos los puntos factibles igual de importantes?
 - ¿O hay algunos más importantes que otros?
 - ¿Cómo podemos caracterizarlos en general?



De vértices, bases y puntos extremos

Definición 2.6

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. $x \in P$ es un **punto extremo** de P , si $\nexists y, z \in P \setminus \{x\} : x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. (i.e. x no es combinación convexa de puntos en P).

Definición 2.7

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. x es un **vértice** de P si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $cx > cy$, $\forall y \in P \setminus \{x\}$.

- ¿Qué relación hay entre puntos extremos y vértices de P ?
- ¿Cómo identificamos puntos extremos/vértices en forma algebraica o algorítmica?

De vértices, bases y puntos extremos

- Para Fijar ideas consideramos un poliedro
 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i x \leq b_i, \quad i \in I\}$ (i.e. $|I| \in \mathbb{N}$).

Definición 2.8

Dado P como antes, y $x^* \in \mathbb{R}^n$ definimos $I(x^*) = \{i \in I : a^i x^* = b_i\}$. $I(x)$ se llama conjunto de **restricciones activas** para x en P . Note que este concepto depende de la representación particular de P .

Teorema 2.2

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro como antes, y $x^* \in P$, $I^* = I(x^*)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 Existen n vectores linealmente independientes en $\{a^i : i \in I^*\}$. (n restricciones li son activas en x^*)
- 2 $\mathbb{R}^n = \langle \{a^i : i \in I^*\} \rangle$ (espacio lineal generado).
- 3 El sistema de ecuaciones $a^i x = b_i : i \in I^*$ tiene solución única.

De vértices, bases y puntos extremos

Definición 2.9

Sea P un poliedro y $x^* \in \mathbb{R}^n$, entonces

- 1 x^* es una **solución básica** si hay n restricciones activas l.i.
- 2 x^* es una solución básica factible si además satisface todas las demás restricciones definiendo P .

Teorema 2.3

Sea P un poliedro no vacío y $x^* \in P$, entonces es equivalente:

- 1 x^* es un vértice de P .
- 2 x^* es un punto extremo.
- 3 x^* es una solución básica factible.

- Hint: Demostrar $1 \Rightarrow 2$, $!3 \Rightarrow !2$, $3 \Rightarrow 1$ con $c = \sum a^i : i \in I(x)$,
- Permite tener una definición *algorítmica* de los vértices de P .
- Los vértices de P son finitos (puede ser exponencial en n).

Poliedros en forma estándar

Definición 2.10

Se dice que un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ está en forma estándar si $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = m$.

- Implica que las restricciones son l.i., y que $n \geq m$.

Teorema 2.4

Todo poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la imagen (lineal) de un poliedro $P' \subseteq \mathbb{R}_+^{n'}$ en forma estándar para algún $n' \geq n$.

Teorema 2.5

Sea $P := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax = b\}$ en forma estándar y $x \in \mathbb{R}^n$. x es una solución básica si y sólo si $Ax = b$ y existe $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ conjunto de índices, tal que

- 1 $\|B\| = m$.
- 2 Los vectores $\{A_{\cdot, i}\}_{i \in B} := A_B$ son l.i.
- 3 $x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Poliedros en forma estándar

- Dada una base B , decimos que $x_i : i \in B$ son **variables básicas**.
- Las variables x_i con $i \in N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ se dicen **no básicas**.
- Note que las columnas $\{A_i\}_{i \in B}$ son una base de $\mathbb{R}^m$.
- Dada una base B , la **solución básica** asociada es $(x_B, x_N) := (B^{-1}b, 0)$.
- Si $x_B \geq 0$ entonces B es una base factible.
- Note que una solución básica puede estar asociada a múltiples bases, ejemplo?
- Dos bases B_1, B_2 se dicen **adyacentes** si $|B_1 \Delta B_2| = 2$.
- ¿Qué tan restrictivo es asumir que A es de rango completo?
 - En teoría basta eliminar restricciones redundantes.
 - Basta transformar el problema $\min\{cx : Ax = b, x \in \mathbb{R}_+^n\}$ al problema $\min\left\{cx + \infty y : (A|I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n+m}\right\}$.

Degenerancia

Definición 2.11

Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ es **degenerada** si $|I(x)| > n$.

Definición 2.12

Dado un poliedro en forma estándar $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y x una solución básica, x es **degenerada** si tiene más de $n - m$ componentes con valor cero.

- Si los poliedros a estudiar fueran *aleatoreos*, degenerancia no debería ser común.
- En problemas prácticos, la degenerancia es común, debido a la estructura.
- Degenerancia depende de la representación usada para el problema.

¿Cuándo existen puntos extremos?

Definición 2.13

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ **contiene una línea** si existe $x \in P$ y una dirección $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $x + \lambda d \in P$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6

Dado $P := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$, entonces es equivalente:

- 1 P posee al menos un punto extremo.
- 2 P no contiene una línea.
- 3 Existe $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ tal que $\{a_i : i \in B\}$ es un conjunto linealmente independiente con $|B| = m$.

Corolario 2.1

Todo poliedro acotado y todo poliedro en forma estándar posee al menos un punto extremo.

Optimalidad de puntos extremos

Teorema 2.7

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que P posee al menos un punto extremo y el problema admite solución óptima, entonces existe una solución óptima que es punto extremo.

Corolario 2.2

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que P posee al menos un punto extremo, entonces existe una solución óptima que es punto extremo, o el problema es no-acotado.

Corolario 2.3

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que $P \neq \emptyset$, entonces existe una solución óptima, o el problema es no-acotado.

Representación de poliedros

Teorema 2.8

Sea P un poliedro acotado, y $V \subseteq P$ el conjunto de vértices de P , entonces $P = \text{conv_hull}(V)$.

Definición 2.14

Dado un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos la **dimensión** de P ($\dim(P)$) como la dimensión del menor espacio lineal afín que lo contiene.

Observación 2.1

Note que $\dim(P) = k$ implica que existe $x_0 \in P$ y $\{x_i\}_{i=1}^k \subsetneq \mathbb{R}^n$ tales que

$$P \subseteq S := \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^k x_i \lambda_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Representación de poliedros

- Para demostrar el teorema, use inducción en $\dim(P)$ (caso $\dim(P) = 0$ es trivial, ¿Por qué?).
- Consideremos poliedro P de dimensión k .
- $P \subseteq S := \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^k x_i \lambda_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$.
- tome $y \in P$, si y es vértice el resultado es trivial, si no, sea v punto extremo de P y considere la línea $u = v + \lambda(y - v)$.
- Sea la restricción $a_0 x \leq b_0$ por donde la semilínea sale de P .
- Defina $Q = \{x \in P : a_0 x = b_0\}$, y u^* tal que $a_0 u^* = b_0$ y $u^* = v + \lambda^*(y - v)$.
- La hipótesis de inducción aplica a Q ¿Por qué?
- Obtenemos el resultado.