

# Teorema de Bayes

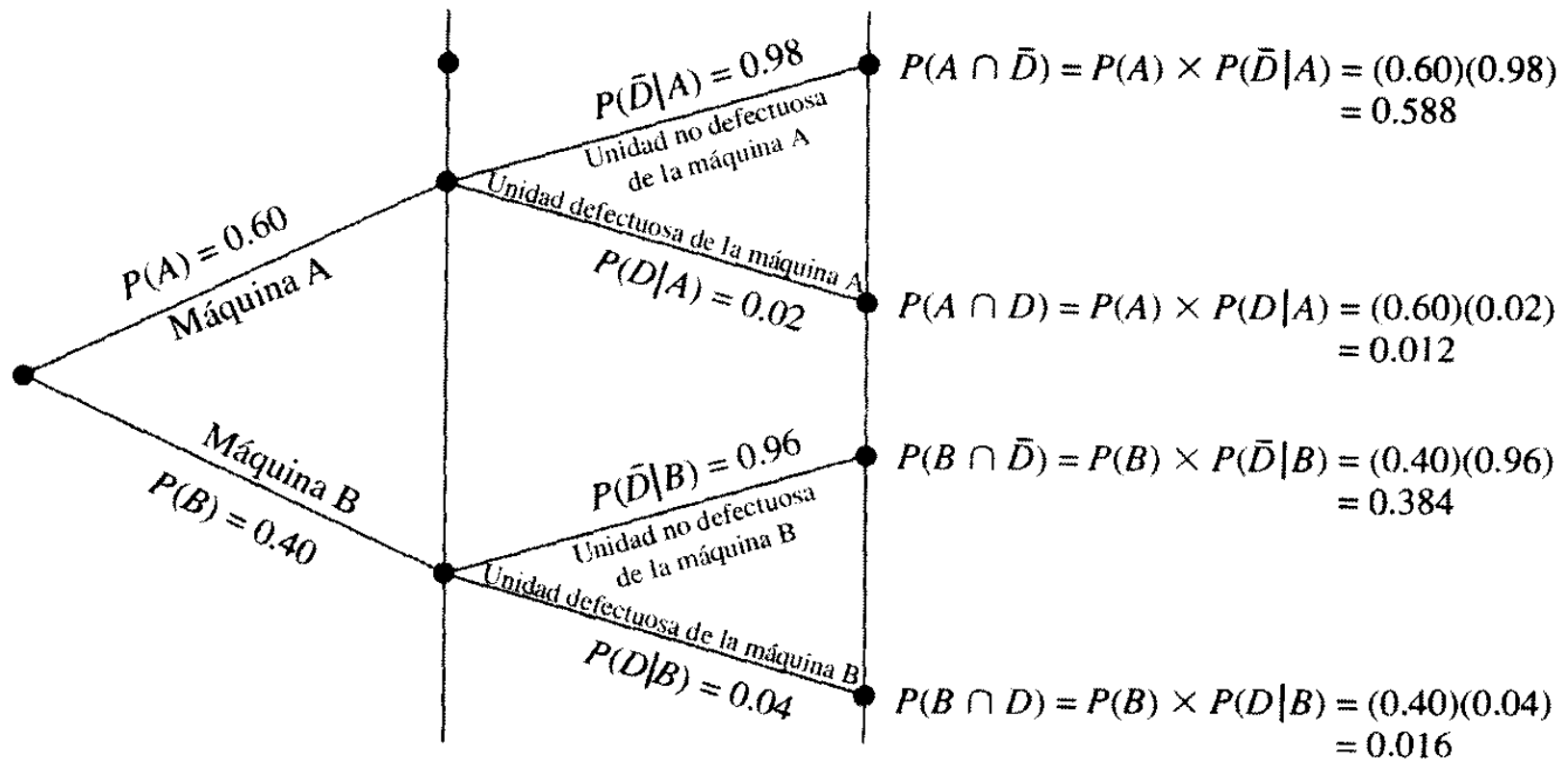
71

- Ejemplo: En una empresa manufacturera, una máquina A produce el 60% de la producción total, mientras que una máquina B el restante 40%.
- El 2% de las unidades producidas por A son defectuosas, mientras que B tiene una tasa de defectos del 4%.
- Se cuenta con una unidad defectuosa, se desea conocer la probabilidad de que venga de la máquina A.

# Teorema de Bayes(2)

72

- Árbol:



## Teorema de Bayes(3)

73

- La probabilidad  $P(A|D)$  se puede obtener utilizando la tercera propiedad obtenida por la probabilidad condicional.
- Sin embargo, se desconoce  $P(D)$ . Necesitamos aplicar probabilidades totales:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

- Bayes: 
$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

## Teorema de Bayes(4)

74

- Volviendo al problema:

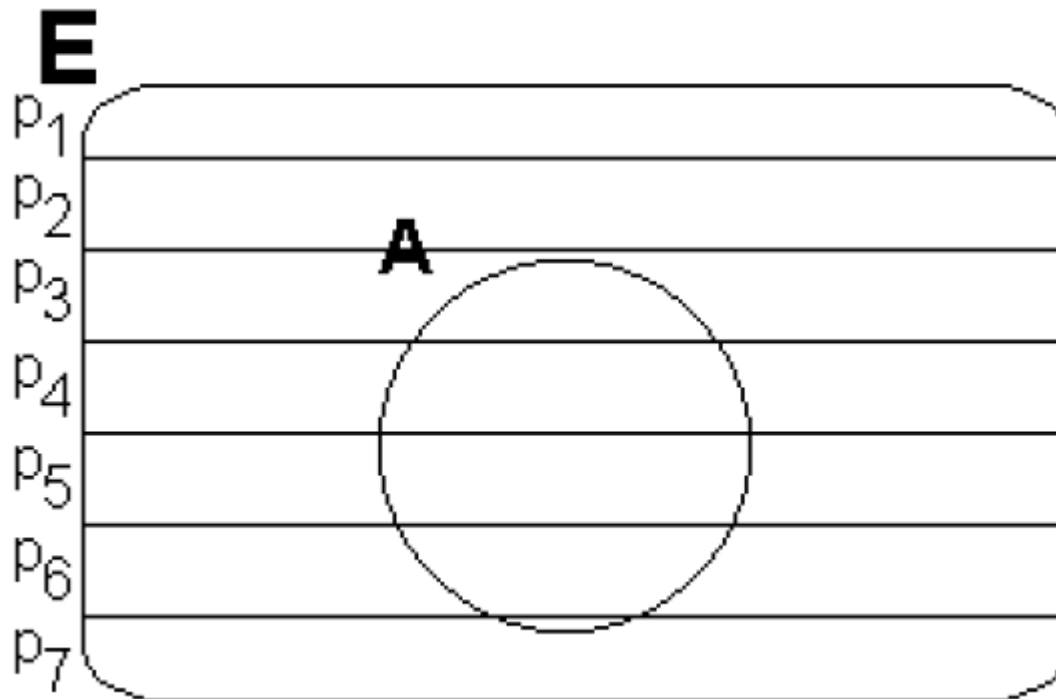
$$P(A|D) = \frac{0.012}{0.012 + 0.016} = 0.43$$

- Tiene sentido?  $P(A|D) < 0.5$ ?  $P(A|D) < P(A)$ ?

## Teorema de Bayes(5)

75

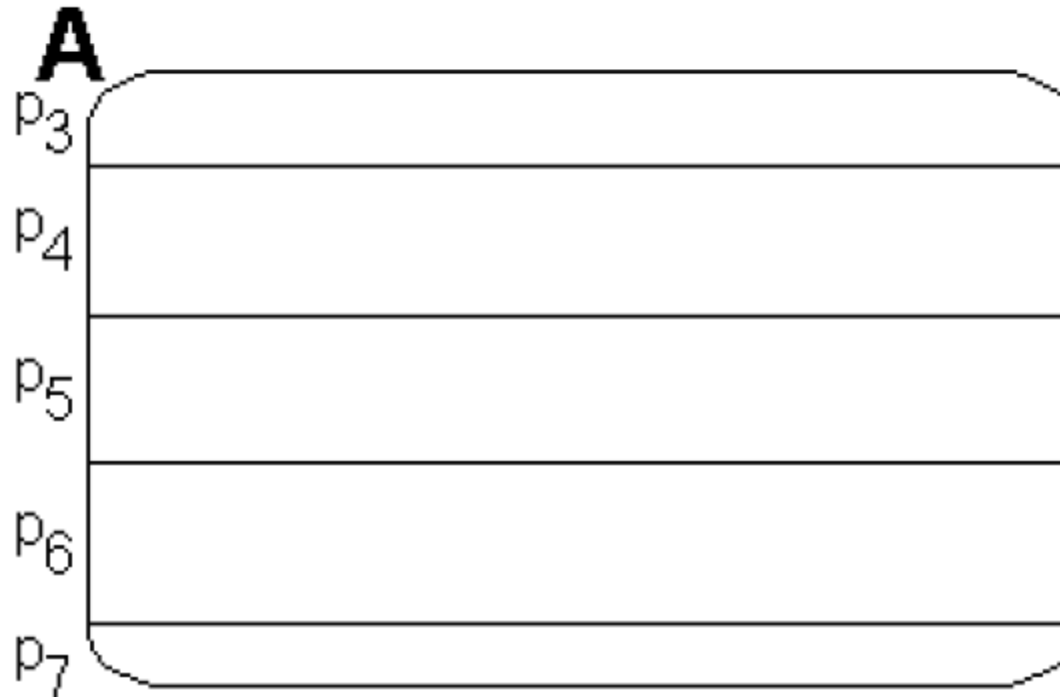
- Gráficamente, tenemos un suceso  $A$  en un espacio muestral particionado. Conocemos las *probabilidades a priori* o probabilidades de las partes **sabiendo que ocurrió  $A$** :



## Teorema de Bayes(6)

76

- Nos interesan las *probabilidades a posteriori* o probabilidades originales de las partes  $p_i$ :



## Teorema de Bayes(7)

77

- La *probabilidades a posteriori* son:

$$P(p_i | A) = \frac{P(A|p_i)P(p_i)}{\sum_j P(A|p_j)P(p_j)}$$

- Esta última fórmula se conoce como la regla de Bayes

# Principios distribuciones de probabilidad

78

- Vamos a llamar *variable aleatoria* a una variable cuyo valor sería el resultado de un determinado experimento.
- Por ejemplo, si el experimento consiste en arrojar un dado, podemos definir la variable aleatoria  $X$  cuyo valor será el número que salga en el dado.
- El conjunto de valores posibles de  $X$  es el espacio muestral.
- En general nos interesará cuál es la probabilidad de que  $X$  asuma cada valor.



## Principios distribuciones de probabilidad(2)

79

- Formalmente, Una variable aleatoria (v.a.)  $X$  es una función real definida en el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio,  $\Omega$ .

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Se llama *rango* de una v.a.  $X$  y lo denotaremos  $R_X$ , al conjunto de los valores reales que ésta puede tomar, según la aplicación  $X$ . Dicho de otro modo, el rango de una v.a. es el *recorrido* de la función por la que ésta queda definida.

# Variables Aleatorias

80

- Ejemplo: Supongamos que se lanzan dos monedas al aire. El espacio muestral (conjunto de resultados posibles) asociado al experimento, es:

$$\Omega = \{cc, cs, ss\}$$

- Podemos asignar entonces a cada suceso elemental del experimento el número de caras obtenidas. De este modo se definiría la variable aleatoria  $X$  como la función dada por

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{cc, cs, ss\} \rightarrow \{2, 1, 0\}$$

- El recorrido o rango de esta función,  $R_X$ , es el conjunto  $R_X = \{0, 1, 2\}$

## Variables Aleatorias(2)

81

- Para designar a las variables aleatorias se utilizan letras mayúsculas. Para designar a uno de sus valores posibles, se usan las letras minúsculas.
- Por ejemplo, si  $X$  es la variable aleatoria asociada a lo que sale al tirar un dado, podemos decir que  $P(X = x) = 1/6, \forall x$ .
- Las v.a. son consistentes con algunos conceptos introducidos anteriormente.

## Variables Aleatorias(3)

82

- Ejemplo: Se tiene el experimento "tirar un dado y considerar el número que sale". El espacio muestral es

$$EM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Definiremos una variable aleatoria  $X$ : el número que sale al tirar el dado.
- Ahora usaremos esa variable aleatoria para calcular la probabilidad de que salga un número mayor que 3. Es decir:

$$P(X > 3)$$

- Observemos que " $X > 3$ " es un suceso. Ahora lo vamos a reemplazar por el suceso equivalente " $X=4 \vee X=5 \vee X=6$ "

## Variables Aleatorias(4)

83

- Ejemplo:

$$P(X > 3) = P(X=4 \vee X=5 \vee X=6)$$

- Como los sucesos " $X=4$ ", " $X=5$ " y " $X=6$ " son disjuntos, podemos sumar sus probabilidades:

$$P(X=4 \vee X=5 \vee X=6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

- Y ahora reemplazamos por las probabilidades que ya son conocidas:

$$P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 1/6 + 1/6 + 1/6$$

- Con lo cual  $P(X > 3) = 1/2$ .

# Tipos de Variables Aleatorias

84

- **Variable aleatoria discreta:** una v.a. es discreta si su recorrido es un conjunto discreto. La variable del ejemplo anterior es discreta. Sus probabilidades se recogen en la función de distribución.
- **Variable aleatoria continua:** una v.a. es continua si su recorrido no es un conjunto numerable. Intuitivamente esto significa que el conjunto de posibles valores de la variable abarca todo un intervalo de números reales.
- Por ejemplo, la variable que asigna la estatura a una persona extraída de una determinada población es una variable continua ya que, teóricamente, todo valor dentro de un rango es posible.

## Función de probabilidades (v.a.d)

85

- Esta función le asigna a cada valor posible de la variable aleatoria un número real que consiste en la probabilidad de que ocurra, y debe cumplir con las 2 condiciones que enunciamos antes:

a) no puede ser negativa en ningún punto

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \geq 0$$

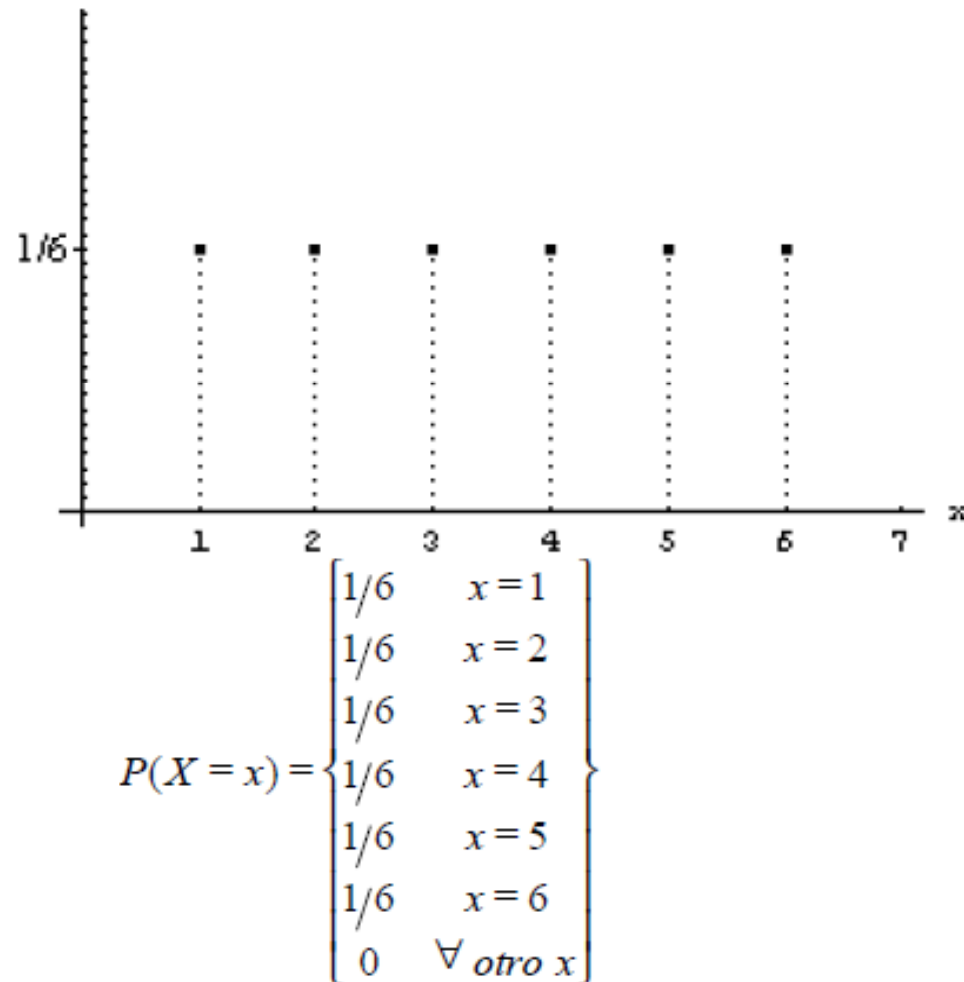
b) la suma de las probabilidades de todos los valores da 1.

$$\sum_{i \in \Omega} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$$

## Función de probabilidades(2)

86

• Ej:





# Función de distribución acumulada (v.a.d)

87

- Se la llama función de distribución acumulada porque indica la probabilidad "acumulada" por todos los valores con probabilidad no nula hasta  $x$  (partiendo de  $x_1$ ):

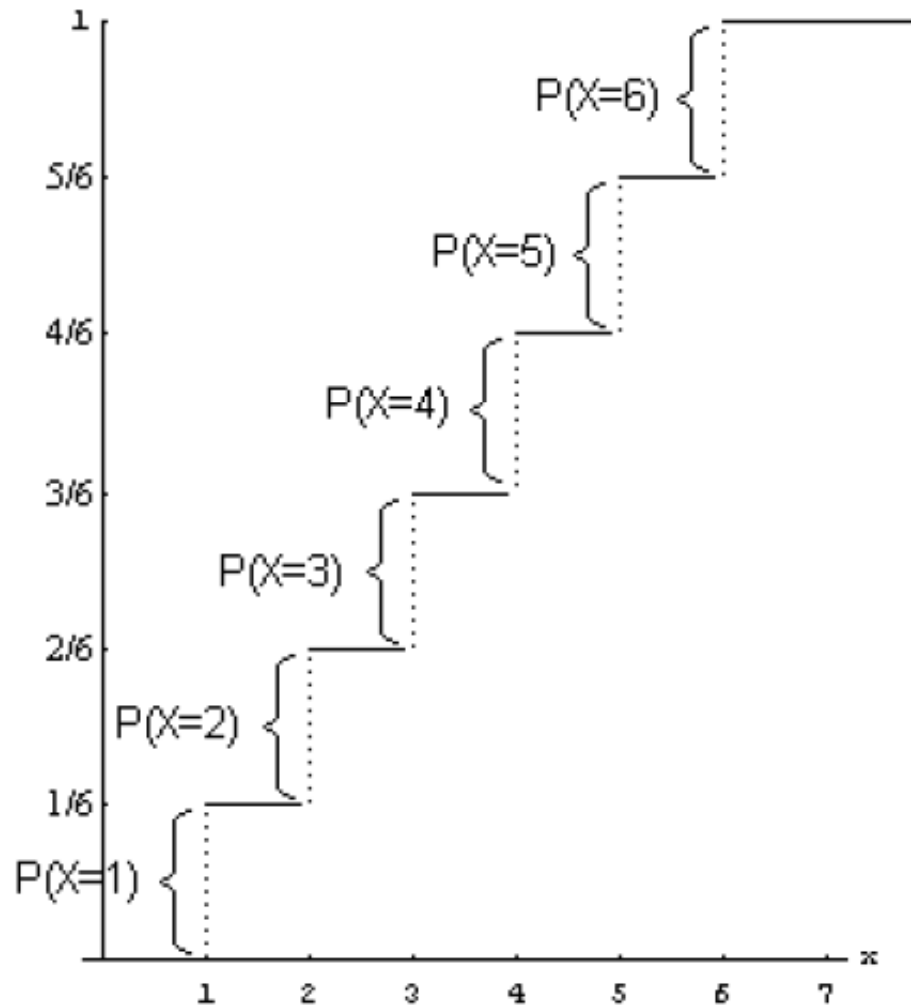
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=1}^x \mathbb{P}(X = x_i)$$

- La probabilidad acumulada comienza siendo cero (en  $-\infty$ ) hasta que encuentra el primer valor con probabilidad no nula. A partir de ese valor, la probabilidad acumulada es la suma de las probabilidades de los puntos que encuentra hasta llegar al último valor con probabilidad no nula, a partir del cual la probabilidad acumulada vale uno.

## Función de distribución acumulada (2)

(88)

• Ej:



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

## Función de distribución acumulada(3)

89

- Propiedades:

$$\mathbb{P}(X < x) = F(x) - \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{P}(X > x) = \sum_{i=x+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = 1 - F(x)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{i=a}^b \mathbb{P}(X = x_i) = F(b) - F(a) + \mathbb{P}(X = a)$$

# Función de densidad de probabilidad (v.a.c)

90

- La **función de densidad de probabilidad** (FDP) en el caso continuo, representada como  $f(x)$ , se utiliza con el propósito de conocer cómo se distribuyen las probabilidades de un suceso o evento, en relación al resultado del suceso. Cumple:
- No negatividad:  $f(x) \geq 0$
- El área bajo  $f(x)$  es 1 en todo el EM:  $\int_{\Omega} f(x) = 1$

# Función de distribución acumulada (v.a.c)

91

- la función de distribución  $F(x)$  es la integral de la función de densidad (de  $-\infty$  hasta  $x$ ):

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- Notar que la probabilidad de que ocurra un valor en particular es cero:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x)$$

## Función de distribución acumulada (2)

92

Propiedades:

- Límites:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$        $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$  es monotonicamente creciente: si  $b > a$  entonces  $F(b) > F(a)$ .
- Complemento:  $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$
- Segmento:  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

## Parámetros v.a.

93

- La función de densidad o la distribución de probabilidad de una v.a. contiene exhaustivamente toda la información sobre la variable.
- Sin embargo resulta conveniente resumir sus características principales con unos cuantos valores numéricos. Estos son, fundamentalmente la *esperanza* y la *varianza*.
- Diferenciamos entre v.a. discretas y continuas.

# Esperanza

94

- **V.a. discretas:** es la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso. Si todos los sucesos son de igual probabilidad la esperanza es la media.
- Para una variable aleatoria discreta con valores posibles  $x_1, x_2 \dots x_n$ , la esperanza se calcula como:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$



# Esperanza

95

- **V.a. continuas:** la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad:

$$\mu = E(X) = \int_{\Omega} xf(x)dx$$

- La esperanza es un operador lineal:

$$E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b$$

# Varianza

96

- La **varianza** se define como la esperanza de la transformación  $[X-E(X)]^2 : E([X-E(X)]^2)$ .
- La **desviación estándar**  $\sigma$  es la raíz cuadrada de la varianza.
- **V.a. discretas:**

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x_i)]$$

## Varianza(2)

(97)

El número de casas que Ponder Real Estate vendió mensualmente varió de 5 a 20 junto con la frecuencia de cada nivel de ventas que aparece en las dos primeras columnas de la tabla que se muestra a continuación.

| (1)<br>Número de meses | (2)<br>Casas ( $x_i$ ) | (3)<br>$P(x_i)$ | (4)<br>$(x_i) P(x_i)$ | (5)<br>$(x_i - \mu)^2 P(x_i)$ |
|------------------------|------------------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------|
| 3                      | 5                      |                 |                       |                               |
| 7                      | 8                      |                 |                       |                               |
| 4                      | 10                     |                 |                       |                               |
| 5                      | 12                     |                 |                       |                               |
| 3                      | 17                     |                 |                       |                               |
| 2                      | 20                     |                 |                       |                               |
| <u>24</u>              |                        |                 |                       |                               |

El Sr. Ponder espera que estas cifras reflejen un incremento en el número promedio de ventas, por encima del 7.3 que vendió en meses anteriores, y una reducción en la variabilidad de las ventas mensuales que habían sido de  $\sigma = 5.7$ . De lo contrario, él ha decidido vender el negocio y convertirse en un bufón de rodeo. ¿Qué consejo puede ofrecerle al Sr. Ponder?