Probabilidades

- La *probabilidad* es la posibilidad numérica de que ocurra un evento.

- La probabilidad de un evento es medida por valores comprendidos entre 0 (imposibilidad) y 1 (certeza).

- Un *experimento* (aleatorio) es una acción que puede tener distintos resultados posibles.

- El *espacio muestral* es el conjunto de resultados posibles de un experimento. Se suele representar por EM o **Ω**.

Probabilidades(2)

- Ejemplos:
  - **Experimento 1: "tirar una moneda y ver que sale"**

  $\mathbf{\Omega} = \{C,S\}$

  - **Experimento 2: "tirar dos monedas y ver que sale"**

  $\mathbf{\Omega} = \{CC,SS,CS\}$

- Un *suceso* es un subconjunto del espacio muestral

  $S_1=\{C\}$, $S_2=\{S\}$, $S_3=\{CC,SS\}$

Probabilidades(3)

- Modelo clásico (Laplace):

$$P(E) = \frac{\text{Número de formas que puede ocurrir el evento E}}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

- Ejemplo: P(cara)=1/2

Probabilidades(4)

- Modelo empírico:

$$P(E) = \frac{\text{Número de veces que ha ocurrido el evento E}}{\text{Número total de experimentos}}$$

- Ejemplo: P(cara)

Definición Axiomática

- Axioma 1: la probabilidad no puede ser negativa:

$$P(A) \geq 0$$

- Axioma 2: la probabilidad del espacio muestral es uno

$$P(EM) = 1$$

- Axioma 3: dos conjuntos son disjuntos ssi la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades:

$$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consecuencias

- Consecuencia 1: $P(A) \leq 1$
- Consecuencia 2: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Consecuencia 3: $P(\emptyset) = 0$
- Consecuencia 4: $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- Consecuencia 5: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad Condicional

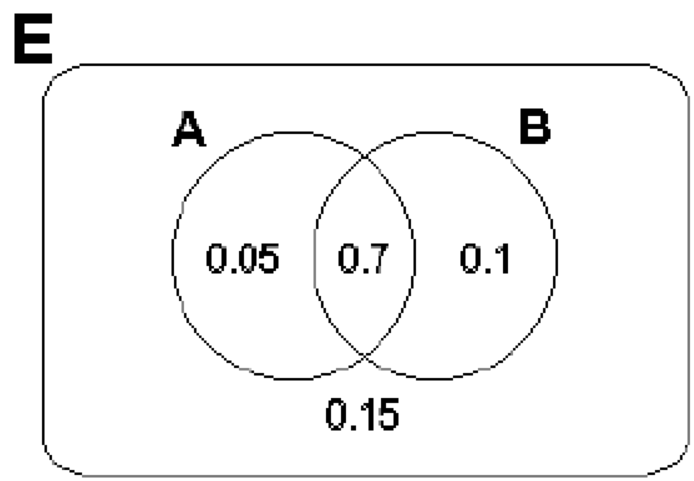
- *Probabilidad condicional* P(A|B) es la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que el evento B ya haya ocurrido.
- Ejemplo:
  - **el 80% de los alumnos estudió para el examen**
  - **el 75% de los alumnos aprobó el examen**
  - **el 15% de los alumnos no estudió para el examen y no aprobó.**

- Sea A el suceso “alumno aprobó examen” y B el suceso “el alumno estudió”. Se tiene que P(A)=0.75, P(B)=0.8 y

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.15$

Probabilidad Condicional(2)

- Gráficamente:



- **Cual es la probabilidad de que un alumno que estudió haya aprobado el examen?**

Probabilidad Condicional(3)

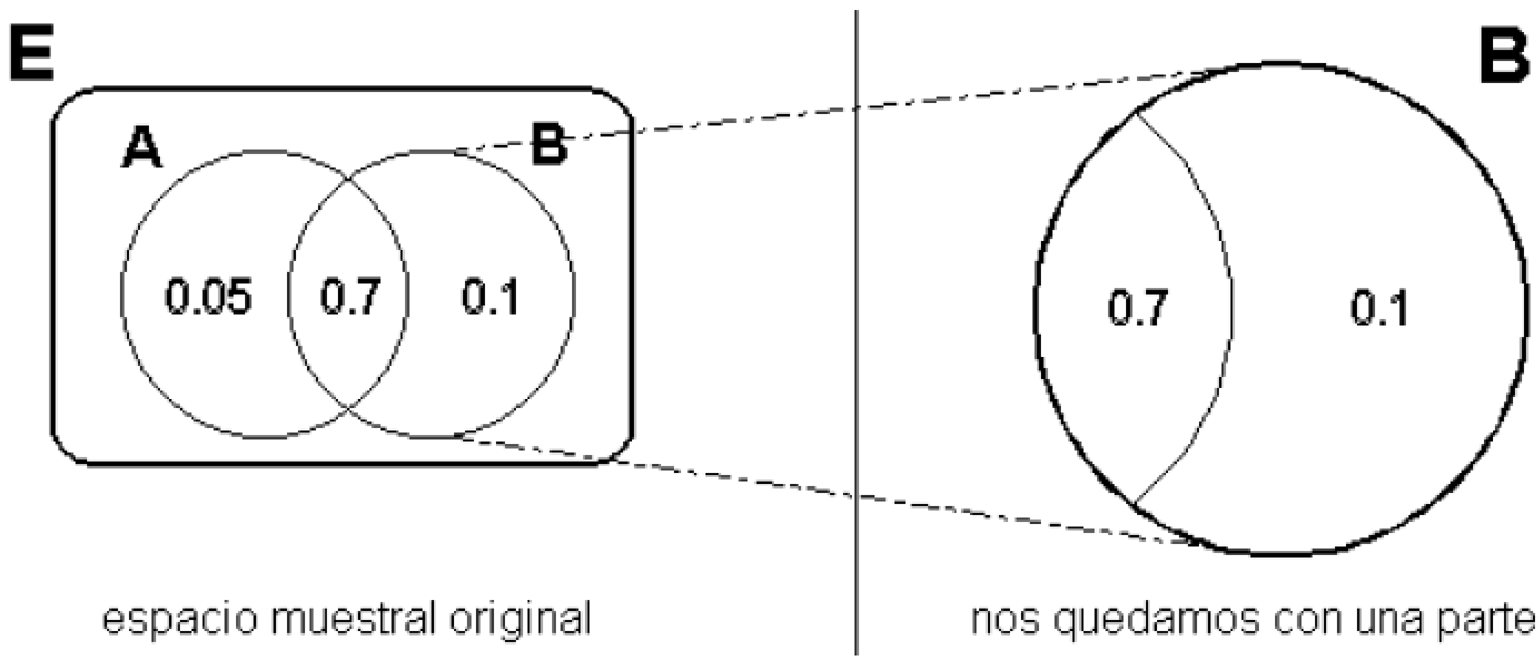
- Intuitivamente, los alumnos que estudiaron fueron el 80%

- Ese 80% está formado por un 70% que aprobó y un 10% que no aprobó. La probabilidad de aprobar es 70/80=0,88

- Formalmente: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

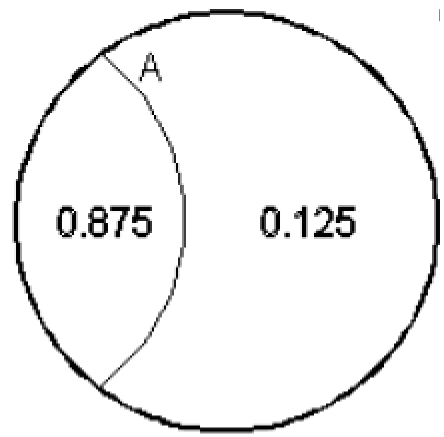
Probabilidad Condicional(4)

- Intuitivamente, P(A|B) es la probabilidad de "estar parados en A, sabiendo que estamos parados en B".



Probabilidad Condicional(5)

- Sin embargo, B no está listo para ser espacio muestral (probabilidades no suman 1)
- Es necesario dividir las probabilidades de B por un factor para que sea EM manteniendo la proporción relativa.
- Como las probabilidades contenidas en B suman P(B), dividiendo por este factor se cumple lo anterior



el nuevo espacio muestral

Propiedades

- Conmutatividad intersección:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) = P(B \cap A)$$

- Intersección 3 eventos:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(A|B)P(C|A \cap B)$$

- Principio Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Independencia

Dos sucesos A,B son independientes ssi:

- P(A|B) = P(A)

$$\Leftrightarrow$$

- P(B|A) = P(B)

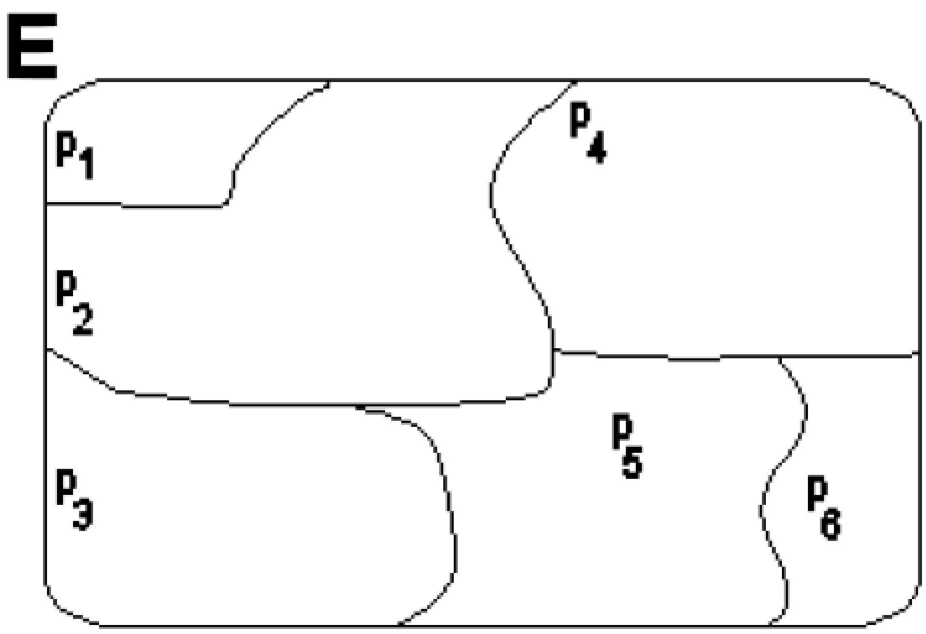
$$\Leftrightarrow$$

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- Advertencia: La independencia de dos sucesos no tiene que ver con que dos sucesos sean disjuntos. De hecho, si dos sucesos con probabilidades no nulas son independientes, entonces no pueden ser disjuntos, ya que $p(A \cap B)=p(A).p(B) \neq 0$.

Probabilidades Totales

- Consideremos un espacio muestral E, con la siguiente partición:

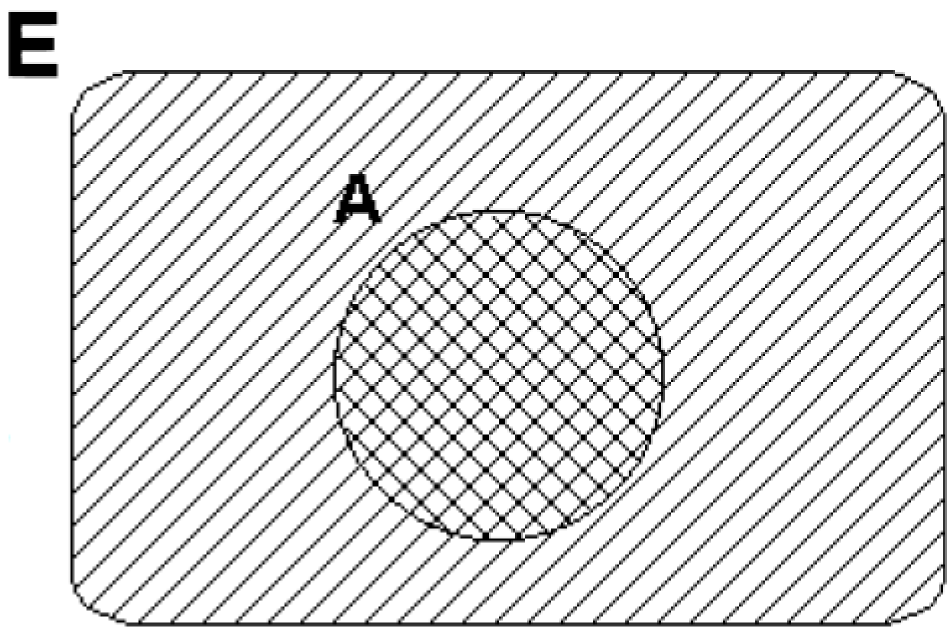


$$E = \sum_i p_i$$

$$p_i \cap p_j = \emptyset$$

Probabilidades Totales(2)

- Además se cuenta con el suceso A, que es subconjunto del espacio muestral:



$$P(A) = P(A \cap E)$$

Probabilidades Totales(3)

- Dado que E es la sumatoria de las probabilidades de la partición establecida:

$$P(A) = P(A \cap E) = P\left(A \cap \sum_{i} p_i\right)$$

- Aplicando la propiedad distributiva de conjuntos:

$$P\big(A \cap (p_1 \cup p_2 \cup \ldots \cup p_n)\big) = P\big((A \cap p_1) \cup (A \cap p_2) \cup \ldots (A \cap p_n)\big)$$

Probabilidades Totales(4)

- Utilizando el tercer axioma podemos escribir la probabilidad de la suma (unión) como suma de probabilidades:

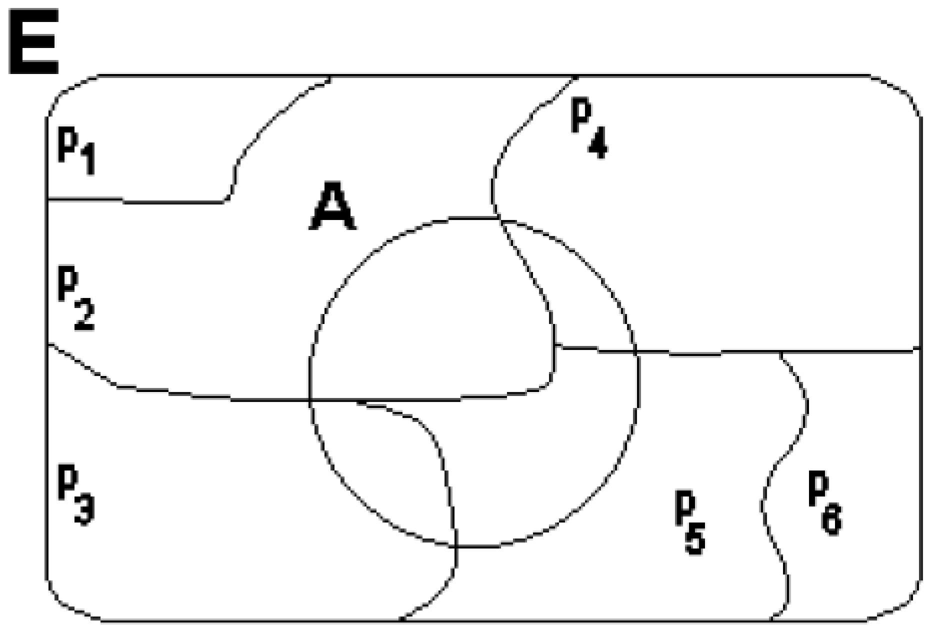
$$P\big((A \cap p_1) \cup \ldots \cup (A \cap p_n)\big)$$
$$= P\big((A \cap p_1)\big) + \cdots + P\big((A \cap p_n)\big)$$

- En resumen, llegamos a lo que se conoce como *probabilidad total:*

$$\sum_i P(A \cap p_i)$$

Probabilidades Totales(5)

- Gráficamente:



Probabilidades Totales(5)

- En particular, para una partición de un suceso D y su complemento:

$$P(A) = \mathrm{P}(A \cap D) + \mathrm{P}(A \cap \overline{D})$$

- Utilizando ahora la fórmula de probabilidad condicional:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|\overline{D})P(\overline{D})$$

- En general:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap p_i) = \sum_i P(A|p_i)\, P(p_i)$$