Otra mirada a la RMS

La relación (o razón o tasa o....) marginal de sustitución describe la tasa de variación de la cantidad de un bien cuando variamos las cantidad del otro y queremos mantener constante la utilidad.
Si la preferencias son representadas por la función de utilidad $U(x, y)$ la curva de indiferencia relativa a (x, y) es

$$I(x, y) = \{(x', y') \,|U(x, y) = U(x, y)\}$$

o sea tiene la forma de una curva de nivel de U

$$\{(x', y') \,|U(x', y') = c\}.$$

La variación de x con respecto a y es descrita por la derivada de x con respecto a y en la curva de nivel.

$$RMS_{xy} = -\frac{dx}{dy}$$

donde $x = x(y)$ es la solución de

$$U(x(y), y) = c.$$

Si derivamos ambos lados por x obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

por lo tanto

$$RMS_{xy} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial U}{\partial x}}.$$

Verán el razonamiento de forma más rigurosa en Calculo cuando con el teorema de las funciones implicitas.

Nota Técnica

Hemos utilizado antes:

$$\frac{dU\left(x\left(y\right),y\right)}{dy}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial U}{\partial y}.$$

¿Como se deriva? La razón incremental de $y\mapsto U\left(x\left(y\right),y\right)$ es

$$\frac{U\left(x\left(y+h\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y\right)}{h}=$$

$$\frac{U\left(x\left(y+h\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y+h\right)}{h}+\frac{U\left(x\left(y\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y\right)}{h}.$$

Tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{U\left(x\left(y\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y\right)}{h}=\frac{\partial U}{\partial y}\left(x\left(y\right),y\right).$$

Observen que

$$\frac{U\left(x\left(y+h\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y+h\right)}{h}=\frac{U\left(x\left(y+h\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y+h\right)}{x\left(y+h\right)-x\left(y\right)}\frac{x\left(y+h\right)-x\left(y\right)}{h}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{U\left(x\left(y+h\right),y+h\right)-U\left(x\left(y\right),y+h\right)}{h}=\frac{\partial U}{\partial y}\left(x\left(y\right),y\right)\frac{dx}{dy}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{dU\left(x\left(y\right),y\right)}{dy}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial U}{\partial y}.$$