Teoría de Campos Fluctuantes - FI5032
Tarea 3 — Entrega 8 de abril de 2011

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Dinámica de la rugosidad. [Sección 9.4 del libro de Kardar.]

Considere una burbuja de jabón inicialmente plana. Debido a las fluctuaciones, la superficie de la burbuja no se mantendrá plana. Su dinámica está descrita por $h(\vec{r},t)$ que indica el desplazamiento vertical de cada punto de la superficie. Una de las fuerzas que actúa es la asociada a la tensión superficial σ. En este caso la energía libre es simplemente igual a σ por el cambio de área debido a las fluctuaciones. Considerando h pequeña se puede aproximar

$$F_\sigma[h] = \sigma \int d^d r \left[\sqrt{1+(\nabla h)^2} - 1\right] \approx \frac{\sigma}{2} \int d^d r\, (\nabla h)^2$$

donde se usó una dimensión d cualquiera para la superficie (normalmente $d = 2$).

La otra fuerza que actúa es la gravedad y en este caso la energía libre es directamente la energía potencial

$$F_g[h] = \frac{\rho g}{2} \int d^d r\, h^2$$

El campo h no es conservado de manera que su dinámica está descrita por el modelo A más ruido

$$\frac{\partial h(\vec{r},t)}{\partial t} = -\lambda \rho g h + \lambda \sigma \nabla^2 h + \xi(\vec{r},t) \qquad (1)$$

donde el ruido es gaussiano de intensidad Γ

$$\langle \xi(\vec{r},t)\xi(\vec{r}\,',t')\rangle = \Gamma \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')$$

(a) Usando la convención de transformada de Fourier

$$F(\vec{k}) = \int d^d r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$$
$$f(\vec{r}) = (2\pi)^{-d} \int d^d k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} F(\vec{k})$$

transforme la ecuación (1) en Fourier. Resuelva la ecuación de Langevin que resulta en términos de la transformada de ξ.

(b) La altura cuadrática media de la superficie se define como

$$w^2(t,L) = \frac{1}{L^d} \int d^d r\, \langle h(\vec{r},t)^2 \rangle$$

donde L es la longitud lineal de la superficie.

Muestre que se puede escribir como

$$w^2(t,L) = (2\pi)^{-d} \int d^d k\, \frac{\Gamma}{\gamma(\vec{k})} \left(1 - e^{-2\gamma(\vec{k})t}\right) \qquad (2)$$

e indique cúanto vale la constante de decaimiento de cada modo $\gamma(\vec{k})$.

(c) La integral en (2) presenta divergencias en algunos casos. Cuando sea necesario se deben introducir *cutoffs* para que sea finita. Más explicitamente, si la integral diverge cuando $k \to 0$ entonces la integral se debe hacer hasta el vector de onda más pequeño dado por el tamaño del sistema: $k_{min} = 2\pi/L$. Por otro lado si la integral diverge cuando $k \to \infty$ (longitudes de onda muy pequeñas), la integral se debe hacer hasta longitudes de onda moleculares a: $k_{max} = 2\pi/a$.

Calcule la evolución de w^2 para tiempos pequeños. Muestre que va como

$$w^2(t,L) = 2\Gamma t / a^d$$

es decir de manera Browniana o difusiva.

(d) Considere ahora tiempos grandes de manera que todos los modos ya han relajado. Muestre que, dependiendo de la dimensión de la superficie se tiene

$$w^2(t,L) \sim \frac{\Gamma}{\mu\sigma} \begin{cases} a^{2-d} & d > 2 \\ \log(L/a) & d = 2 \\ L^{2-d} & d < 2 \end{cases}$$

El caso de tiempos intermedios será analizado en otra tarea.

[P2] Descomposición spinodal de campos conservados. [Sección 8.7.3 del libro de Chaikin y Lubensky.]

En el caso de un campo conservado (por ejemplo, concetración en una mezcla binaria), la dinámica se describe con el modelo B. Para describir la dinámica, es usual hacer un cambio de variables lineal en el parámetro de orden ϕ, de manera que la energía libre se escribe como

$$F[\phi] = \int d^3 r \left[f(\phi) + \frac{c}{2}(\nabla\phi)^2\right]$$

con

$$f(\phi) = \frac{r}{2}(\phi^2 - 2\phi\phi_0) + u\phi(\phi^3 - 4\phi_0^3)$$

y $r = a(T - T_c)$. Los parámetros a, c y u se consideran independientes de T, como es usual en la teoría de Landau. La ventaja del cambio de variables hecho es que la energía libre tiene un punto de equilibrio en ϕ_0, independiente de T.

(a) Grafique f para distintas temperaturas. Muestre que existe una temperatura spinodal $T_{sp} < T_c$ para la cual el mínimo en ϕ_0 se vuelve un punto de inflexión.

(b) Considere la dinámica cerca de la temperatura spinodal. Suponga una perturbación sinusoidal del campo (note que una perturbación sinusoidal no cambia la masa total, por lo que es legítimo suponer que los parámetros antes fijados no cambian)

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0 + \phi_1(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Calcule la tasa de decaimiento de las perturbaciones: Λ_k.

Muestre que si $T > T_{sp}$ las perturbaciones son estables ($\Lambda_k < 0$).

(c) Grafique Λ_k para $T < T_{sp}$. Interprete el resultado.

[P3] Separación de fases con conservación de momentum

Lea y comente en una página el artículo *van der Waals-like transition in fluidized granular matter*, M. Argentina, M. G. Clerc, and R. Soto, Phys. Rev. Letters **89**, 044301 (2002).

Bibliografía:

- P. M. Chaikin and T.C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*.
- M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*.