# Pauta Control 3: Electrodinámica

Profesor: Rodrigo Arias
Auxiliar: Felipe Subiabre
13 de junio de 2011

**P1.** a) En el sistema $S'$ la carga $q$ (es igual por invarianza) produce un campo electrostático:

$$A'_\mu(X') = \left(\vec{0}, \frac{iq}{|\vec{x}'|}\right).$$

De las transformaciones de Lorentz sabemos que

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z \\ \implies |\vec{x}'| &= \sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Como el potencial $A_\mu(X)$ es un tensor, transformamos su valor al sistema $S$ del modo usual $A_\mu = L_{\mu\nu}A'_\nu$, donde $L$ es la transformación de $S'$ a $S$, que corresponde a un boost con velocidad $-v$ en el eje $x$:

$$\begin{aligned} iA_t &= i\gamma\left(A'_t + \frac{vA'_x}{c}\right) = i\gamma A_t = \frac{i\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}, \\ A_x &= \gamma\left(A'_x + \frac{vA'_t}{c}\right) = \frac{\gamma\beta q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}, \\ A_y &= A'_y = 0, \\ A_z &= A'_z = 0 \\ \implies A_\mu(X) &= \frac{\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}} \cdot (\beta\hat{x}, i), \end{aligned}$$

donde $\beta := \dfrac{v}{c}, \gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

b) Queremos probar que

$$A_\mu(X) = \frac{qV_\mu(\tau)}{|V_\nu(\tau)(X_\nu - X_\nu(\tau))|}\Big|_{\tau=\tau_{ret}}.$$

Notemos que el lado derecho es un tensor. En efecto, dado un sistema inercial $S_1$ y el punto de observación $X = (\vec{x}, ict)$, el punto $Y = (\vec{y}, ict_Y)$ de la trayectoria de $q$ desde el que se enviaría la señal luminosa que llega a $\vec{x}$ en $t$ define el tiempo retardado $t_{ret} := t_Y$. Si se transforma $X$ a $X'$ en un nuevo sistema inercial $S_2$, el punto $Y'$ asociado a $X'$ es justamente la transformación de $Y$ a este sistema, debido a que ambos eventos están unidos por la línea de mundo de un fotón, y esta situación es invariante entre sistemas inerciales. Tenemos entonces que como eventos $Y$ y $Y'$ son iguales, y por lo tanto lo son también los tiempos propios asociados $\tau_{ret} = \tau'_{ret}$. Esto prueba que $\tau_{ret}$ es invariante al cambiar de sistema, y dado que $V_\mu$ y $X_\nu$ son tensores, al cambiar de sistema se tiene:

$$\begin{aligned} V'_\mu(\tau'_{ret}) &= V'_\mu(\tau_{ret}) = L_{\mu\nu}V_\nu(\tau_{ret}), \\ X'_\mu(\tau'_{ret}) &= X'_\mu(\tau_{ret}) = L_{\mu\nu}X_\nu(\tau_{ret}), \end{aligned}$$

es decir, las cantidades $V_\mu(\tau_{ret})$ y $X_\mu - X_\mu(\tau_{ret})$ son tensores. Tenemos entonces que la expresión $V_\nu(\tau_{ret})(X_\nu - X_\nu(\tau_{ret}))$ es un escalar de Lorentz (producto de Lorentz entre tensores), y sabemos que $q$ también lo es, luego la expresión $\frac{qV_\mu(\tau)}{|V_\nu(\tau)(X_\nu - X_\nu(\tau))|}|_{\tau=\tau_{ret}}$ corresponde a escalares multiplicando a un tensor y es por lo tanto un tensor.

Con esto, y sabiendo que $A_\mu(X)$ también es un tensor basta probar que la expresión es cierta en un sistema inercial, pues entonces el tensor $A_\mu(X) - \frac{qV_\mu(\tau)}{|V_\nu(\tau)(X_\nu - X_\nu(\tau))|}|_{\tau=\tau_{ret}}$ será 0 en este sistema y por linealidad también lo será en cualquier otro, es decir, se tendrá la igualdad en todo sistema.

Calculemos entonces ambos lados en el sistema en que $q$ está en reposo en el origen (se omite la prima para no sobrecargar la notación y dado que sólo se considera un sistema): el lado izquierdo fue calculado en la parte a), y vale $A_\mu(X) = \left(\vec{0}, \frac{iq}{|\vec{x}|}\right)$, mientras que el lado derecho vale (usando que en este sistema $\tau = t$):

$$\begin{aligned}
X_\mu(t) &= (\vec{0}, ict) \quad \forall t \\
\Longrightarrow V_\mu(t) &= (\vec{0}, ic) \quad \forall t \\
\Longrightarrow V_\nu(t_{ret})(X_\nu - X_\nu(t_{ret})) &= -c^2(t - t_{ret}), \\
c|t - t_{ret}| &= |\vec{x}| \\
\Longrightarrow \frac{qV_\mu(t)}{|V_\nu(t)(X_\nu - X_\nu(t))|}|_{t=t_{ret}} &= \left(\vec{0}, \frac{iq}{|\vec{x}|}\right),
\end{aligned}$$

con lo que se tiene la igualdad.

**P2.** Las ecuaciones de Euler–Lagrange para la acción dada por una densidad Lagrangiana $L\left(\phi_i(\vec{x}), \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\vec{x})\right)$ (aquí se considera el tiempo como parte del vector posición $\vec{x}$) están dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{i,j}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_i} \quad \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$$

donde se ha denotado $\phi_{i,j} := \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$.

En el caso en cuestión $L = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu J_\nu$, con dependencia en los potenciales $A_\mu$ y sus derivadas parciales (pues $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$), y el cuadrivector de corrientes $J_\mu$ es dado (fuente). Calculamos entonces las derivadas correspondientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial A_\nu} &= -\frac{1}{c} J_\nu \\
\frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}} &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial A_{\nu,\mu}} (F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \frac{1}{8\pi}(F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}) = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

donde se usó que $\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \alpha = \mu \text{ y } \beta = \nu \\ -1 & , \text{ si } \alpha = \nu \text{ y } \beta = \mu \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$ y la antisimetría de $F_{\mu\nu}$. Tenemos entonces que las ecuaciones (una para cada valor de $\nu$) de Euler–Lagrange para la densidad dada son

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = -\frac{4\pi}{c} J_\nu.$$

Reescribiéndolas en términos de $A_\mu$ como se pide y usando el gauge de Lorenz $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right) = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\mu x_\nu} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu x_\mu} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu^2}$$

$$\implies \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu^2} = -\frac{4\pi}{c} J_\nu \implies \Box A_\nu = -\frac{4\pi}{c} J_\nu \quad \forall \nu \in \{1, \ldots, 4\},$$

o equivalentemente

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

(donde las cantidades son cuadrivectores) conocida como la ecuación de ondas no-homogénea con gauge de Lorenz para los potenciales, que expresa las ecuaciones de Maxwell en forma covariante.

**P3.** a) Las ecuaciones de movimiento relativistas son

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \\ \frac{dT}{dt} &= q\vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

donde $\vec{p} = m(v)\vec{v}, T = m(v)c^2$ son correspondientemente el momentum y la energía cinética relativistas, y $m(v) = m_0\gamma(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Como $\vec{E} = \vec{0}$, de la segunda ecuación $T$ es constante y entonces $m(v)$ es constante $m = \dfrac{T}{c^2}$, por lo que la primera ecuación se reescribe como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{mc}\vec{v} \times \vec{B}.$$

Llamando $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \dfrac{q}{mc}\vec{B}$ se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega v_y, \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x, \\ \dot{v}_z &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son de la forma (usando que el movimiento inicialmente era en el plano $x - y$ y llamando $v_0$ a la rapidez inicial)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v_0(\cos(\omega t + \phi)\hat{x} - \sin(\omega t + \phi)\hat{y}). \\ \implies \vec{x}(t) &= \vec{C} + \frac{v_0}{\omega}(\sin(\omega t + \phi)\hat{x} + \cos(\omega t + \phi)\hat{y}), \end{aligned}$$

es decir, desarrolla un movimiento circular con radio $R = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{mv_0c}{qB}$. Finalmente notamos que la rapidez es constante $v = v_0$, y debido a que $m(v)$ es constante el producto $m(v)v = mv_0$ también lo es y corresponde al momentum $p$, por lo que el radio $R = \dfrac{pc}{qB}$ depende de éste y no de la masa.

b) Si el campo eléctrico es $\vec{E} = E\hat{y}$, la primera ecuación de movimiento se escribe

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(E - \frac{v_x}{c}B\right)\hat{y} + q\frac{v_y}{c}B\hat{x}.$$

Luego si $E = \dfrac{v}{c}B$, donde $v$ es la velocidad inicial en el eje $x$, la función $v(t) = v\hat{x}$ resuelve la ecuación de movimiento (ambos lados se anulan) y satisface la condición inicial (por construcción), entonces por existencia y unicidad sabemos que esta será la solución, i.e. este valor del campo eléctrico cancela el efecto magnético pues da origen a un movimiento no acelerado.

Para que esto ocurra, en el sistema propio de la partícula la fuerza debe ser nula. En efecto, usando las fórmulas de transformaciones de los campos se obtiene (denotando el sistema propio con prima):

$$\begin{aligned}
E'_{\parallel} &= E_{\parallel} = 0 \\
B'_{\parallel} &= B_{\parallel} = 0 \\
\vec{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)_{\perp} = \frac{\gamma}{q}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}_{\perp} = \vec{0} \\
\vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)_{\perp}
\end{aligned}$$

donde el último resultado puede ser no nulo, pero corresponde a un campo puramente magnético en el sistema propio, por lo que no ejerce fuerza (en este sistema la velocidad es nula).

c) Una forma posible consiste en el siguiente procedimiento:

- Considerar una zona de dimensiones suficientemente grandes donde existe un campo magnético uniforme $B$ como en a). Lanzar el haz de electrones a través de ella en forma perpendicular al campo magnético y medir el radio de la órbita circular que describe. Del resultado $R = \dfrac{pc}{qB}$ y conociendo la intensidad del campo y la rapidez de la luz se obtiene el cuociente $\dfrac{p}{q}$.
- Generar adicionalmente un campo eléctrico uniforme y perpendicular al campo magnético y a la dirección de lanzamiento del haz, ajustando su intensidad $E$ de modo que la nueva trayectoria de los electrones sea recta. Por la parte b) se tiene la relación $E = \dfrac{v}{c}B$, de donde se despeja la rapidez $v$ de los electrones, y por consiguiente también se obtiene $\gamma$.
- Con lo anterior se conoce los valores de $\dfrac{p}{q} = \dfrac{m_0\gamma v}{q}$ y $\gamma v$, por lo que calculando el cuociente entre ellos se obtiene la razón $\dfrac{m_0}{q}$ entre la masa y la carga del electrón.

**P4.** Recordemos la fórmula para los campos eléctrico y magnético producidos por una carga $q$ moviéndose a rapidez constante $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{(1-\beta^2)q}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}, \\
\vec{B} &= \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E},
\end{aligned}$$

donde $\beta = \dfrac{v}{c}$, $\theta$ es el ángulo formado entre la dirección de movimiento de la carga y la recta que une la posición de la carga y el punto de observación, y $\vec{r}$ el vector entre la carga y el punto de observación. En el caso particular en que la recta que una la carga con el punto de observación es perpendicular a la dirección de movimiento de la carga ($\theta = \frac{\pi}{2}$) se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \gamma\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \\
\vec{B} &= \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E},
\end{aligned}$$

a) En el Sistema A la carga $-q$ se mueve a velocidad $v$ en el eje $x$, y en el momento en que ambas cargas se cruzan $+q$ se encuentra a distancia $d$ de ella y en su punto de observación $\theta = \frac{\pi}{2}, \hat{r} = \hat{y}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{E}_A &= -\frac{\gamma q}{d^2}\hat{y}, \\
\vec{B}_A &= \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}_A = \frac{v}{c}\hat{x} \times -\gamma\frac{q}{d^2}\hat{y} = -\frac{\gamma v q}{c d^2}\hat{z}, \\
\Longrightarrow \vec{F}_A &= q\left(\vec{E}_A + \frac{-v\hat{x}}{c} \times B_A\right) = -\frac{\gamma q^2}{d^2}\hat{y} - \frac{\gamma v^2 q^2}{c^2 d^2}\hat{y} = -\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{q^2}{d^2}\hat{y}.
\end{aligned}$$

b) En el Sistema B la carga $-q$ se mueve a velocidad $v' = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ en el eje $x$ (debido a la adición relativista de velocidades) y la carga $+q$ está en reposo. Nuevamente al cruzarse la distancia entre las cargas es $d$ (las distancias perpendiculares al movimiento no se contraen), $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\hat{r} = \hat{y}$. Si llamamos $\beta' = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$ y $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2}}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\vec{E}_B &= -\frac{\gamma' q}{d^2}\hat{y}, \\
\vec{B}_B &= \frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{E}_B = \frac{v'}{c}\hat{x} \times -\gamma'\frac{q}{d^2}\hat{y} = -\frac{\gamma' v' q}{c d^2}\hat{z}, \\
\Longrightarrow \vec{F}_B &= q\vec{E}_B = -\frac{\gamma' q^2}{d^2}\hat{y} = -\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \cdot \frac{q^2}{d^2}\hat{y}.
\end{aligned}$$

c) En el Sistema C el campo generado por $-q$ es electrostático y por lo tanto dado por la Ley de Coulomb. Nuevamente la distancia entre las cargas al cruzarse es $d$ y $\hat{r} = \hat{y}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{E}_C &= -\frac{q}{d^2}\hat{y}, \\
\vec{B}_C &= \vec{0}, \\
\Longrightarrow \vec{F}_C &= q\vec{E}_C = -\frac{q^2}{d^2}\hat{y}.
\end{aligned}$$

Notar que en el Sistema C la carga $+q$ se mueve con velocidad $-v' = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ en el eje $x$, pero esto no fue relevante para los cálculos por ser el campo magnético nulo.

Otra forma de resolver el problema es calcular los campos en el Sistema C (o en cualquier otro, pero en este es más simple por su naturaleza estática) y luego usar las fórmulas de transformación. En ello se debe tener presente que estas fórmulas dan los campos en puntos transformados, pero la simultaneidad se puede ver afectada, dando como resultado que en el nuevo sistema el punto en que se calcula el resultado no corresponda al cruce entre las partículas (misma posición en el eje $x$ en el mismo instante).

En este caso este inconveniente no ocurre debido a que los movimientos son paralelos (revisar las transformaciones de Lorentz). A pesar de que en la solución dada se consideraron los cruces en cada sistema por separado, lo anterior justifica que ambas formas son equivalentes respecto a las cantidades siendo calculadas.