Pauta Auxiliar 4: Electrodinámica

Profesor: Rodrigo Arias
Auxiliar: Felipe Subiabre
12 de mayo de 2011

P1. a) En el medio 1 se tiene $\varepsilon = \mu = 1$. Si la onda incidente viaja en el eje z entonces

$$\vec{k}_A = k\hat{e}_z = \frac{\omega}{c}\hat{e}_z.$$

Para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ hacemos el ansatz de ondas planas:

$$\vec{E}_A = Ae^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_x, \quad \vec{B}_A = Ae^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_y$$

pues $\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}$.
Para la onda reflejada, que se desplaza en dirección opuesta,

$$\vec{k}_C = -k\hat{e}_z = -\frac{\omega}{c}\hat{e}_z.$$

Luego los campos correspondientes son

$$\vec{E}_C = Ce^{i(-kz-\omega t)}\hat{e}_x, \quad \vec{B}_C = -Ce^{i(-kz-\omega t)}\hat{e}_y.$$

En el medio 2, el vector de onda de la onda transmitida es complejo:

$$\vec{k}_B = k_B\hat{e}_z = \frac{\omega}{c}(n+i\kappa)\hat{e}_z.$$

En este caso los campos obtenidos son

$$\begin{aligned} \vec{E}_B &= Be^{i(k_B z-\omega t)}\hat{e}_x = Be^{i(\frac{\omega}{c}nz-\omega t)}e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\hat{e}_x \\ \vec{B}_B &= (n+i\kappa)Be^{i(k_B z-\omega t)}\hat{e}_y \end{aligned}$$

Imponiendo la continuidad de las componentes tangenciales de $\vec{E}$ y $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ (notar que las componentes normales son nulas, por lo que no se obtiene información adicional de ellas) en $z = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\parallel}: \quad A + C &= B \\ \vec{H}^{\parallel}: \quad A - C &= \frac{1}{\mu}(n+i\kappa)B \end{aligned}$$

de donde resolviendo para B:

$$B = \frac{2A}{1+\frac{1}{\mu}(n+i\kappa)} \approx \frac{2A\mu}{n(1+i)} = \frac{\sqrt{2}A\mu}{n}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}e^{-i\frac{\pi}{4}}A$$

donde se han utilizado $n = \kappa = \left(\frac{2\pi\sigma\mu}{\omega}\right) \gg 1$ y $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, y se ha supuesto $\mu \approx 1$. Observar que el factor $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ indica una onda transmitida desfasada respecto a la incidente.
Resolviendo para C:

$$C = \left(1 - \frac{1}{\mu}(n+i\kappa)\right)B = \frac{1-\frac{1}{\mu}(n+i\kappa)}{1+\frac{1}{\mu}(n+i\kappa)}A \approx -A.$$

Lo que nos dice que en primera aproximación la mayor parte de la onda es reflejada, esto debido a que el metal en cuestión es muy buen conductor (recordar que en el límite de conductor perfecto $\sigma \to \infty$, la reflexión es total).
Para uso posterior notamos que la expresión aproximada del campo $\vec{H}$ transmitido es

$$\vec{H}_B = \frac{1}{\mu}\vec{B}_B = \frac{1}{\mu}\cdot(n+i\kappa)Be^{i(k_B z-\omega t)}\hat{e}_y = \frac{2A(n+i\kappa)}{\mu+(n+i\kappa)}e^{i(k_B z-\omega t)}\hat{e}_y \approx 2Ae^{i(k_B z-\omega t)}\hat{e}_y$$

b) Notamos que $\vec{j} = \sigma\vec{E} \parallel \hat{e}_x, \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} \parallel \hat{e}_y$, luego $\vec{j}\times\vec{H} \parallel \hat{e}_z$, es decir, la fuerza es ejercida en la dirección z. Además el término de decaimiento exponencial asegura que la fuerza es integrable para $z \to \infty$, con lo que se puede integrar sobre un cilindro V semi-infinito de eje paralelo a $\hat{e}_z$ y tapa de área ΔA coincidente con la interfaz $z = 0$ de modo de obtener la fuerza ejercida por la onda sobre ésta:

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int_V \vec{j}\times\vec{H}dV = \frac{\sigma}{c}\int_0^\infty E_{B_x}H_{B_y}\Delta A dz\hat{e}_z,$$

de donde se obtiene la presión

$$p = \frac{\vec{F}\cdot\hat{e}_z}{\Delta A} = \frac{\sigma}{c}\int_0^\infty E_{B_x}H_{B_y}dz,$$

donde se debe tener presente que se debe considerar el producto de las partes reales correspondientes.
Recordando que

$$\begin{aligned} E_{B_x} &\approx A\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i(\frac{\omega}{c}(n+i\kappa)z-\omega t)} \\ H_{B_y} &\approx 2Ae^{i(\frac{\omega}{c}(n+i\kappa)z-\omega t)} \end{aligned}$$

el producto de las partes reales es

$$\Re(E_{B_x})\Re(H_{B_y}) \approx 2A^2\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}e^{-\frac{2\omega}{c}\kappa z}cos\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t-\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t\right).$$

Luego para obtener la presión promedio, se promedia sobre un periodo:

$$\langle cos(\omega t+\phi_1+\phi_2)cos(\omega t+\phi_1)\rangle = \langle cos(\omega t+\phi_2)cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}cos(\phi_2),$$

luego para $\phi_1 = \frac{\omega}{c}nz, \phi_2 = -\frac{\pi}{4}$ se tiene el promedio temporal:

$$\left\langle\Re(E_{B_x})\Re(H_{B_y})\right\rangle \approx \frac{A^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}e^{-\frac{2\omega}{c}\kappa z}$$

y la presión promedio es

$$\langle p\rangle \approx \frac{\sigma}{c}\frac{A^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{2\omega}{c}\kappa z}dz = \frac{\sigma}{c}\frac{A^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}\frac{c}{2\omega\kappa} = \frac{\sigma}{c}\frac{A^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}}\frac{c}{2\omega}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\mu\sigma}}$$

$$\Longrightarrow \langle p\rangle \approx \frac{A^2}{4\pi}$$

que en este caso es independiente del material y la frecuencia, pero este resultado no es general debido a la suposición inicial $n = \kappa = \left(\frac{2\pi\sigma\mu}{\omega}\right) \gg 1$.

P2. a) Recordamos las relaciones entre las amplitudes de los campos eléctricos incidente, reflejado y transmitido cuando el medio de la onda incidente es el vacío (n=1):

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}, \quad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1+n(\omega)},$$

pues $\mu = 1$ en ambos medios, y estas relaciones son válidas incluso para el caso $n(\omega)$ complejo ya que en su deducción no se utiliza la naturaleza de este número.

Para ondas planas monocromáticas, la potencia por unidad de área transmitida en la dirección $\hat{n}$ se obtiene de la parte real del vector de Poynting complejo:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\vec{E}\times\vec{B}^* = \frac{c}{8\pi}n^*|\vec{E}|^2\hat{n}$$

(puesto que $\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}$ en general), es decir para cualquier medio

$$P = \Re(\vec{S}\cdot\hat{n}) = \frac{c}{8\pi}\Re(n(\omega))|\vec{E}|^2,$$

donde n es el índice de refracción complejo del medio en que se realiza el cálculo. Con esto se obtienen directamente los coeficientes de transmisión y reflexión:

$$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \left|\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}\right|^2,$$

$$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{\Re(n(\omega))|E_t|^2}{|E_i|^2} = \frac{4\Re(n(\omega))}{|1+n(\omega)|^2}$$

(observar que se cumple $R+T=1$).

b) Los campos al interior del material son

$$\vec{E} = \vec{E}_t e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{n}\times\vec{E},$$

donde $\vec{k} = k\hat{n} = \dfrac{\omega n(\omega)}{c}\hat{n}$. Luego la potencia por unidad de volumen es (usando $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ y $\vec{H} = \vec{B}$):

$$\begin{aligned}
\Re\left(\frac{i\omega}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D}^* - \vec{B}\cdot\vec{H}^*)\right) &= \Re\left(\frac{i\omega}{8\pi}(\varepsilon^*|\vec{E}|^2 - |\varepsilon|^2|\vec{E}|^2)\right) \\
&= \Re\left(\frac{i\omega}{8\pi}(\varepsilon^* - |\varepsilon|^2)\right)|\vec{E}|^2 \\
&= \frac{\omega}{8\pi}\Im(\varepsilon)|\vec{E}|^2 \\
&= \frac{\omega}{8\pi}\Re(n(\omega))\Im(n(\omega))|\vec{E}|^2 \\
&= \frac{\omega}{8\pi}\Re(n(\omega))\Im(n(\omega))|\vec{E}_t|^2 e^{-2\Im(k(\omega))z}.
\end{aligned}$$

Integrando sobre un cilindro semi-infinito como en el problema 1 se obtiene la potencia transmitida por unidad de área:

$$\frac{P_t}{\Delta A} = \frac{\omega}{8\pi}\Re(n(\omega))\Im(n(\omega))|\vec{E}_t|^2\int_0^\infty e^{-2\Im(k(\omega))z}dz = \frac{\omega}{8\pi}\Re(n(\omega))\Im(n(\omega))|\vec{E}_t|^2\cdot\frac{1}{2\Im(k(\omega))},$$

y usando que $k(\omega) = \dfrac{\omega n(\omega)}{c}$ esto se reduce a

$$\frac{P_t}{\Delta A} = \frac{c}{8\pi}\Re(n(\omega))|\vec{E}_t|^2,$$

que es justamente la potencia transmitida por unidad de área obtenida del vector de Poynting, por lo que la potencia por unidad de volumen dada es consistente con el coeficiente de transmisión.