

**MIGUEL A. FURMAN**

# **ELECTRO- MAGNETISMO**

**Problemas analizados y resueltos**

**Segunda Edición**

**TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

© MIGUEL A. FURMAN ROSENZVIT  
Inscripción N° 39.911  
Santiago de Chile. 1972.

Se terminó de imprimir  
esta segunda edición en el mes  
de marzo de 1978  
en los talleres de ALFABETA IMPRESORES LTDA.  
Lira 140 - Santiago, Chile

## PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION

El éxito de esta "Colección de Problemas" es evidente del hecho que su primera edición se agotó rápidamente, hace ya varios años, y que desde entonces se ha convertido en un texto que circula activamente en la universidad en cada comienzo de los períodos lectivos; esto habla con elocuencia de la excelencia del trabajo realizado por el autor.

Los problemas resueltos en este libro fueron seleccionados de entre aquellos propuestos, ya sea como tareas, ejercicios, controles o exámenes, a los alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile en aquellos años (esto es, en los años inmediatamente anteriores a 1971, fecha en que se realizó este trabajo). Es una reflexión interesante el notar que el nivel de estos problemas es superior al nivel medio que hoy se exige en nuestras universidades, y que, sin embargo, el grado de dificultad que nuestros actuales alumnos encuentran en el tema parece ser mayor que el que encontraron sus predecesores, a juzgar por los rendimientos académicos respectivos.

Los alumnos deberían usar este texto para **aprender a trabajar**, y no sólo como un medio para asegurar una nota aprobatoria en los controles (lo que desgraciadamente parece ser la regla general). Para ello, como dicho ya por el autor en el prefacio de la primera edición, deberían trabajar ellos mismos cada problema, sin recurrir al libro sino cuando realmente se encuentren sin saber cómo continuar, y no limitarse a mirar superficialmente los desarrollos hechos, con la esperanza de memorizar (¡en el mejor de los casos!) los pasos esenciales. Sólo de esa manera, con ese método, estarán aprovechando realmente, en cuanto a universitarios, el generoso esfuerzo realizado por Miguel A. Furman, en ese entonces (1971) destacado estudiante en nuestra Facultad, y hoy flamante Doctor de la Universidad de California y activo investigador en Física Teórica.

**Igor Saavedra**

Facultad de Ciencias Físicas y  
Matemáticas,  
Universidad de Chile

Santiago, marzo de 1978.

## P R E F A C I O

Esta colección de problemas resueltos de electromagnetismo está destinada a complementar los cursos relacionados con esta materia, que se dictan principalmente en las carreras de Ingeniería y Técnicas, en las varias Universidades de nuestro país.

La idea surgió atendiendo a las necesidades de los alumnos que cursan el ramo de Electromagnetismo en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, cuna de esta obra: una colección de problemas resueltos llenaría un vacío en la estructura docente del curso, y sería de gran utilidad para los alumnos. Este ha sido el espíritu en que se ha realizado esta colección.

Los problemas han sido seleccionados tratando de ser los más representativos de las materias que se pasan en un curso de electromagnetismo de este nivel; además, se ha procurado alcanzar un equilibrio adecuado entre los distintos tipos de problemas, como son los de interés físico, los que simplemente ilustran algún concepto abstracto o fórmula, los que requieren saber calcular, y los de aplicación práctica. Cuando ha sido conveniente e ilustrativo, los problemas se han resuelto por varios métodos.

Los problemas se han resuelto en la forma más explícita posible, sin omitir detalles (salvo los triviales) en los cálculos; el alumno tiene así ejemplos completos de resolución de problemas. Sin embargo, la única forma en que el alumno puede adquirir una comprensión cabal de ellos y entrenamiento en su resolución, es haciendo por sí mismo todos los cálculos necesarios, y confrontándolos luego con los que aquí aparecen.

Deliberadamente no se ha querido dar, al final, una lista de problemas propuestos, sin resolver: una tal lista sería necesariamente incompleta. Se deja así a criterio del profesor del ramo el tipo de problemas que estime que sus alumnos deban realizar como tareas semanales; debe quedar muy en claro que esta Colección no pretende ser una "Biblia" para los alumnos del curso, sino sólo una ayuda para aquéllos realmente interesados en aprender y adquirir destreza en la resolución de problemas.

Se utiliza en todos los problemas el sistema de unidades MKS racionalizado, simplemente porque es éste el que se usa más frecuentemente en las aplicaciones tecnológicas del electromagnetismo. En algunas ocasiones se utiliza una misma letra para designar cantidades físicas distintas, pero se ha tenido el cuidado de que no pueda haber confusión posible; las letras y símbolos usados son los habituales en los libros de electromagnetismo; la carga del electrón se designa por  $-e$ , e  $> 0$ , en todos los problemas en que aparece.

La clasificación de los problemas por materias es como sigue: Electrostática, problema 1 al 18; esto incluye problemas relativos a fuerza y trabajo en el campo electrostático, cálculo del campo eléctrico producido por distintas distribuciones de carga, teorema de Gauss y aplicaciones, cálculo de la función potencial, condensadores y cálculo de capacidades, teorema de reciprocidad de Green, medios dieléctricos, cargas de polarización y vector polarización, energía almacenada en el campo electrostático, teorema de unicidad de la solución de la ecuación de Poisson, y método de las imágenes. Efecto Joule y cálculo de resistencias, problemas 19 y 20. Circuitos de corriente continua, problemas 21 al 25; esto incluye varios métodos de resolución de circuitos, principio de superposición, y cálculo de potencias. Magnetostática, problemas 26 al 42; esto incluye cálculo del campo magnético producido por distintas distribuciones de corriente, potencial vector y aplicaciones, movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos, fuerzas y torque sobre momentos magnéticos y espiras, energía almace-

nada en el campo magnético, magnetización y electroimanes, precesión de Larmor, fórmula de Neumann y cálculo de inductancias mutuas y propias, y constante de acoplamiento. Inducción electromagnética y fenómenos transientes, problemas 43 al 45. Corriente alterna, problema 46 al 49; esto incluye varios métodos de resolución de circuitos, cálculo de potencias, y diagramas fasoriales. Ondas electromagnéticas, problemas 50 al 54; esto incluye ondas en el vacío, en dieléctricos, en plasma y en conductores, reflexión y refracción, coeficiente de transmisión y reflexión, y principios de guías de ondas.

Finalmente, es un placer agradecer aquí al Profesor I. Saavedra, quien me propuso la realización de esta colección, por las muchas discusiones, sugerencias y correcciones que me hizo en los distintos problemas; y a la Srta. Sylvia López, por haber mecanografiado el manuscrito, y por su paciencia y buena disposición para hacer, posteriormente todos los cambios que fueron necesarios.

Miguel Furman

Santiago, Diciembre de 1971.

## I N D I C E

ELECTROSTATICA, Problemas 1 al 18

EFFECTO JOULE Y CALCULO DE RESISTENCIAS, Problemas 19 y 20

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA, Problemas 21 al 25

MAGNETOSTATICA, Problemas 26 al 42

INDUCCION ELECTROMAGNETICA Y FENOMENOS TRANSIENTES, Problemas 43 al 45

CORRIENTE ALTERNA, Problemas 46 al 49

ONDAS ELECTROMAGNETICAS, Problemas 50 al 54

PROBLEMA 1.-

En un campo electrostático, se lleva una carga  $q$ , desde un punto A en que el potencial es  $V_1$  hasta un punto B de potencial  $V_2 > V_1$ .

a) Calcule el trabajo realizado para efectuar esta operación y, según el signo de  $q$ , discuta si es el agente externo o el campo quien realizó el trabajo.

b) Un electrón se suelta desde A y luego se observa (sin modificar su movimiento) cuando pasa por un punto C a potencial  $V$ . Calcule la energía cinética que lleva en C.

Resolución

a) Por ser el campo electrostático, existe una función potencial  $V = V(\vec{r})$  tal que

$$\vec{E} = - \nabla V.$$

Sea  $d\vec{\ell}$  un elemento diferencial vectorial de la trayectoria según la cual se lleva la carga  $q$  desde A hasta B:

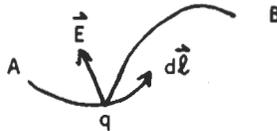


Fig. 1

Se cumple lo siguiente:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \nabla V \cdot d\vec{\ell} = - dV;$$

$$q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - qdV;$$

pero  $q\vec{E}$  es la fuerza que el campo ejerce sobre la carga  $q$ :

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - qdV.$$

Por definición,  $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$  es un elemento de trabajo que el campo realiza en el traslado de la carga; llamémoslo  $dW_C$ :

$$dW_C = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Como el campo es conservativo, el trabajo realizado por el campo es igual y de signo contrario al que realiza el agente externo, pues por hipótesis la energía cinética de la carga es cero en A y B; sea  $dW_A$  el elemento de trabajo realizado por el agente externo en el traslado de  $q$ :

$$dW_A = - dW_C = - \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = qdV$$

y el trabajo total realizado por el agente externo será:

$$W_A(A \rightarrow B) = \int_A^B dW_A = \int_A^B qdV = q(V_2 - V_1)$$

Como  $V_2 > V_1$ , el signo de  $W_A$  será el de  $q$ ; si  $q$  es positivo (negativo) será el agente externo (campo) quien realice el trabajo en el traslado de  $q$ . (Se supone que "realizar trabajo" significa "realizar trabajo positivo").

b) Como no hay agente externo, el trabajo realizado por el campo se transforma íntegramente en energía cinética; sea  $-e$  la carga del electrón, y sea  $v$  su velocidad al pasar por el punto  $C$ ; entonces:

$$W_C(A \rightarrow C) = -W_A(A \rightarrow C) = +e(V - V_1)$$

y

$$W_C(A \rightarrow C) = \frac{1}{2} m v^2$$

luego

$$\frac{1}{2} m v^2 = +e(V - V_1)$$

(La expresión  $+e(V - V_1)$  debe ser positiva para que el movimiento sea real;

esto es sólo posible si  $V > V_1$ , puesto que  $e$  es positivo. Esto quiere decir que el electrón se mueve hacia las regiones de mayor potencial, lo cual está de acuerdo con la ley de fuerzas,  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , pues  $e > 0$  y  $\vec{E}$  apunta siempre hacia las regiones de menor potencial).

### PROBLEMA 2.-

Calcular el campo eléctrico producido por las siguientes configuraciones y en las regiones que se indican:

- a) Casquete semiesférico de radio  $R$  cargado con densidad de carga superficial constante  $\sigma$ ; en el centro de la esfera.
- b) Anillo de radio  $r$ , cargado uniformemente con densidad de carga lineal; sobre su eje.
- c) Disco de radio  $R$ , cargado con densidad de carga superficial  $\sigma$  constante; sobre su eje.
- d) Cilindro macizo de radio  $R$  y altura  $h$ , cargado uniformemente con densidad de carga en volumen  $\rho$ ; sobre su eje.

### Resolución.

- a) Coloquemos el casquete con su centro en el origen  $O$  de un sistema de coordenadas;

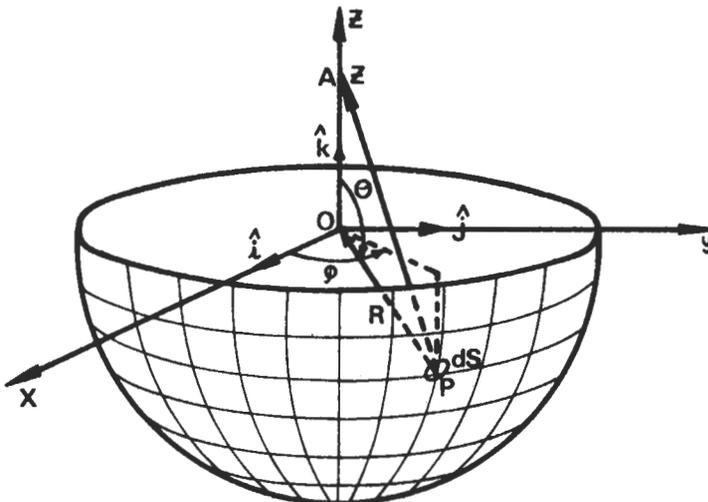


Fig. 2

Sea P un punto cualquiera del casquete; sea A un punto cualquiera sobre el eje Oz; en estas condiciones,  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{OP}$  y  $\hat{k}$ , y  $\varphi$  es el ángulo entre la proyección de  $\vec{OP}$  sobre el plano xOy y el eje Ox; calculemos el potencial sobre el eje Oz, y luego el campo a partir de él.

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|PA|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS(P)}{|PA|}$$

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

El casquete está descrito, en coordenadas esféricas, por:

$$\begin{cases} r = R \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$V(z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} dV(z)$$

$$V(z) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

$$V(z) = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{2}{-2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[ z + R - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

El campo eléctrico  $\vec{E}$  será

$$\vec{E} = -\nabla V;$$

por simetría,  $\vec{E}$  sobre el eje Oz es colineal con  $\hat{k}$ , luego:

$$\vec{E}(z) = -\hat{k} \frac{dV}{dz}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{z^2}$$

El campo eléctrico pedido es  $\vec{E}(z=0)$ ; sin embargo, si hacemos  $z=0$  directamente en la fórmula de  $\vec{E}(z)$ , resulta que no está bien definido; sin embargo notamos que cuando  $z$  tiende a cero, tanto el numerador como el denominador tienden a cero; luego es posible aplicar la regla de l'Hopital

$$\vec{E}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{d}{dz} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}{\frac{d}{dz} (z^2)}$$

$$\vec{E}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{(-R) (-1/2) (R^2 + z^2)^{-3/2} (2z)}{2z}$$

$$\vec{E}(0) = \frac{\sigma \hat{k}}{4\epsilon_0}$$

Este resultado se puede encontrar directamente calculando  $d\vec{E}$  en el origen e integrando:

$$d\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PO}|^3} \vec{PO}$$

(ver figura anterior).

Por simetría,  $\vec{E}(0)$  es colineal con  $\hat{k}$ , es decir:

$$\vec{E}(0) = E_z(0) \hat{k}$$

$$d\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{R^3} \left[ -R(\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) \right]$$

Pero como sólo nos interesa la componente según  $\hat{k}$ ,

$$\vec{E}(0) = -\frac{\sigma \hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{E}(0) = \frac{\sigma \hat{k}}{4\epsilon_0}$$

El resultado no depende del radio R del casquete; esto es aparentemente extraño, pero puede entenderse si razonamos así: obviamente,  $\vec{E}(0)$  debe depender de la densidad de carga  $\sigma$ , pues si el casquete no estuviera cargado, no existiría campo; también es obvio que depende del medio que rodea la densidad de carga, es decir, de  $\epsilon_0$ , pues si el medio no fuera el vacío, el campo sería distinto; además, por simetría,  $\vec{E}(0)$  debe ser colineal con  $\hat{k}$ . La única forma de combinar estos ingredientes para construir  $\vec{E}(0)$  de tal modo que éste tenga dimensiones de campo eléctrico, es:

$$\vec{E}(0) = K \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k},$$

en que K es una constante sin dimensiones.

Ahora bien; supongamos que R aparezca en el resultado formando parte de K como una potencia cualquiera de R; la única forma de mantener a K sin dimensiones, es que esta potencia de R sea cancelada por otra potencia (de igual exponente) de alguna longitud. Pero la única longitud característica de nuestro problema es precisamente R; luego, de aparecer R en el resultado debiera ser calculado consigo mismo, es decir, no puede figurar en él.

b) Calculemos primero el potencial producido sobre el eje y luego encontraremos  $\vec{E}$  a partir de él; se deja propuesto calcular el campo eléctrico directamente.

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\ell}{a}$$

$$dV(z) = \frac{\lambda r d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V(z) = \int_{\phi=0}^{2\pi} dV(z)$$

$$V(z) = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{-----} \quad (1).$$

Por simetría, el campo eléctrico sobre el eje del anillo es colineal con  $\hat{k}$ ; luego:

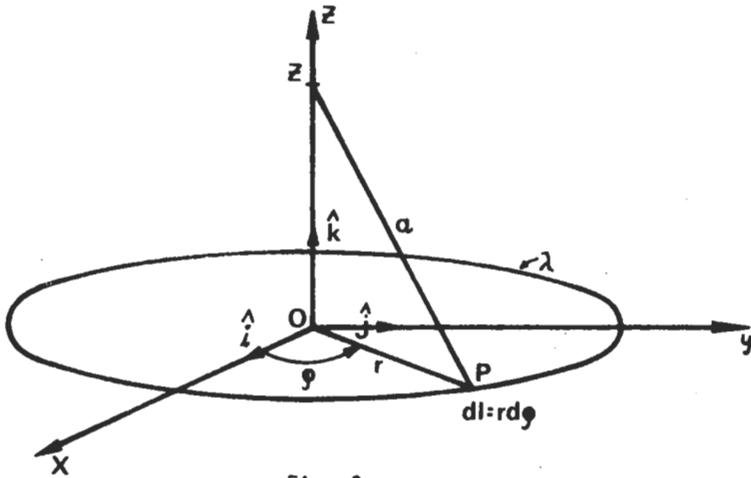


Fig. 3

$$\vec{E}(z) = -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz}$$

$$\vec{E}(z) = -\hat{k} \frac{\lambda r}{2 \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda r z}{2 \epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

c) Calcularemos primero el potencial producido sobre el eje del disco, y luego el campo eléctrico a partir de él. Se deja igualmente propuesto el cálculo directo de  $\vec{E}$ . Para calcular el potencial sobre el eje, consideraremos al disco como si estuviera compuesto por anillos de ancho  $\Delta r$  y de radio  $r$  variable entre cero y  $R$ :

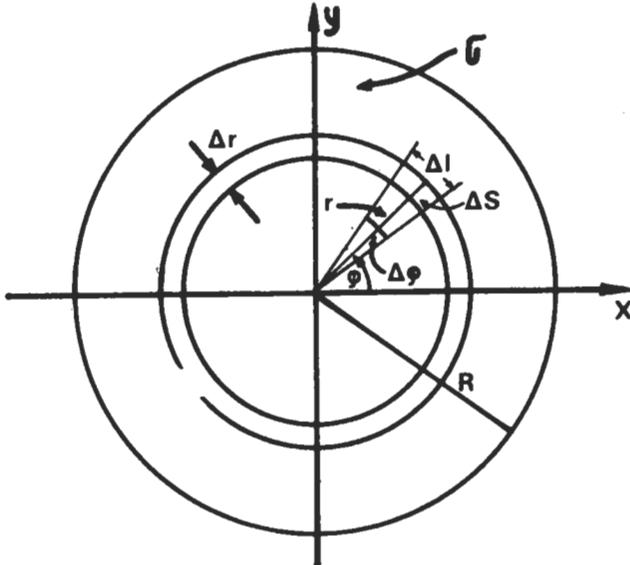


Fig. 4

Necesitamos una relación entre  $\lambda$  del anillo,  $\sigma$  del disco, y  $\Delta r$ ;

$$\Delta q = \sigma \Delta S = \sigma (\Delta r) \cdot (\Delta \ell) = \sigma r (\Delta r) \cdot (\Delta \phi);$$

por otra parte,

$$\Delta q = \lambda \Delta \ell = \lambda r \Delta \phi;$$

comparando ambas relaciones, resulta:

$$\lambda = \sigma \Delta r$$

El potencial producido por el anillo de radio  $r$  será: (ver (1))

$$\Delta V(z) = \frac{\sigma r \Delta r}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}},$$

es decir, tomando el límite,

$$dV(z) = \frac{\sigma r dr}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}},$$

y el potencial producido por todo el disco será:

$$V(z) = \int_{r=0}^R dV(z)$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \sqrt{r^2 + z^2} \Big|_0^R$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot [\sqrt{z^2 + R^2} - z]$$

Por simetría, el campo  $\vec{E}$  sobre el eje es colineal con  $\hat{k}$ ; luego,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma \hat{k}}{2 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \text{----- (2)}$$

(los cálculos que hemos hecho son para  $z \geq 0$ ; sin embargo, el campo  $\vec{E}$  es simétrico con respecto al plano del disco).

d) En este caso no calcularemos el potencial sobre el eje del cilindro porque las integrales son algo complicadas; sin embargo, utilizaremos el método de superposición aplicado directamente al campo  $\vec{E}$ : supondremos que el cilindro está compuesto de disco de espesor  $\Delta z'$ , y sumaremos todos sus efectos. Se deja propuesto el cálculo directo de  $\vec{E}$ .

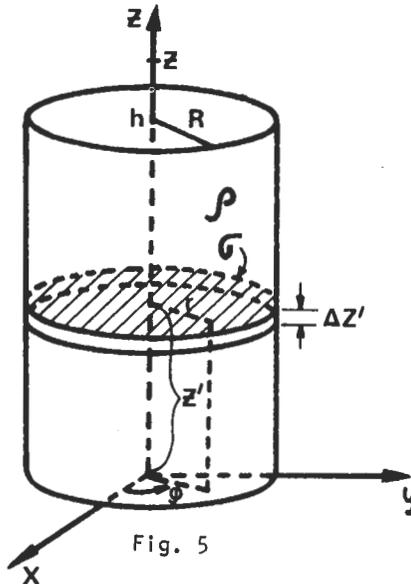


Fig. 5

Necesitamos una relación entre  $\rho$  del cilindro,  $\sigma$  del disco y  $\Delta z'$ :

$$\Delta q = \rho \Delta \delta = \rho r (\Delta r) (\Delta \varphi) (\Delta z')$$

y también:

$$\Delta q = \sigma \Delta S = \sigma r (\Delta r) (\Delta \varphi)$$

Comparando, resulta:

$$\sigma = \rho \Delta z'$$

La contribución del disco a la altura  $z'$  al campo eléctrico en el punto  $z$  será (ver (2)):

$$\Delta \vec{E} = \frac{\rho \Delta z' \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]$$

y tomando el límite,

$$d\vec{E} = \frac{\rho dz' \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]$$

El campo eléctrico producido por todo el cilindro será:

$$\vec{E}(z) = \int_{z'=0}^h d\vec{E}(z)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ z' - \sqrt{(z - z')^2 + R^2} \right]_{z'=0}^h$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ h - \sqrt{(z - h)^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

### PROBLEMA 3.-

Se tiene un condensador esférico compuesto de dos esferas metálicas huecas concéntricas (armaduras del condensador) de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ), y de espesor despreciable aunque finito. La armadura interna se carga con una carga  $Q_0 > 0$ . Se supone que la tierra (que se toma como origen de potenciales) está infinitamente alejada.

I. La armadura externa se conecta a tierra a través de una batería cuya diferencia de potencial entre sus bornes es  $V_0$  (ver Fig. 6).

- Calcule la carga que se induce en las superficies interior y exterior de cada una de las armaduras.
- Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- Calcule la función potencial en todos los puntos del espacio, y la diferencia de potencial entre las armaduras.

II. Se cortocircuita la batería (conexión directa a tierra) (ver Fig. 7).

d) Repita los cálculos anteriores.

III. Se desconecta la armadura externa de tierra, y se acerca una carga  $q > 0$  hasta una distancia  $c > b$  del centro del condensador. (Ver Fig. 8)

Decida si la acción de la carga  $q$  modifica o no:

- e) la carga total de cada una de las armaduras;  
 f) la densidad de carga en ellas;  
 g) la función potencial y la diferencia de potencial entre ellas.  
 Fundamente sus respuestas.

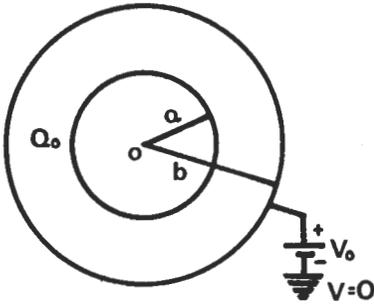


Fig. 6

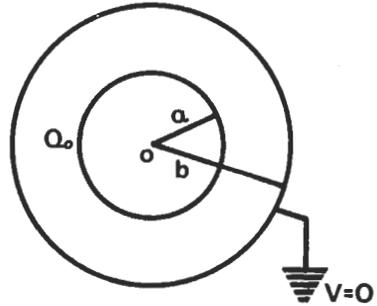


Fig. 7

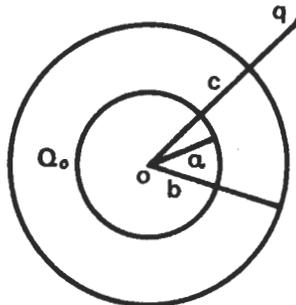


Fig. 8

Resolución.

1. El problema tiene simetría esférica debido a que la tierra está infinitamente alejada, de modo que las líneas de campo serán radiales en todo el espacio; todas las densidades de carga serán uniformes; la función potencial dependerá sólo de la distancia  $r$  al centro del condensador.

a) En el hueco que queda al interior de la armadura interna no hay carga libre, por hipótesis; sean  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , las cargas totales de las superficies interior y exterior de las armaduras interna y externa, respectivamente, (ver Fig. 9).

Es obvio que se cumplirá  $Q_3 = -Q_2$ , porque todas las líneas de campo que salen de la superficie exterior de la armadura interna deben llegar a la superficie interior de la armadura externa.

Calculemos las cargas sistemáticamente: por hipótesis, se cumple:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

Sean  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  superficies esféricas geométricas, concéntricas con las armaduras. (Ver Fig. 9).

Aplicando el teorema de Gauss a  $S_2$ :

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = 0,$$

pues el campo en el interior de un conductor es siempre cero.

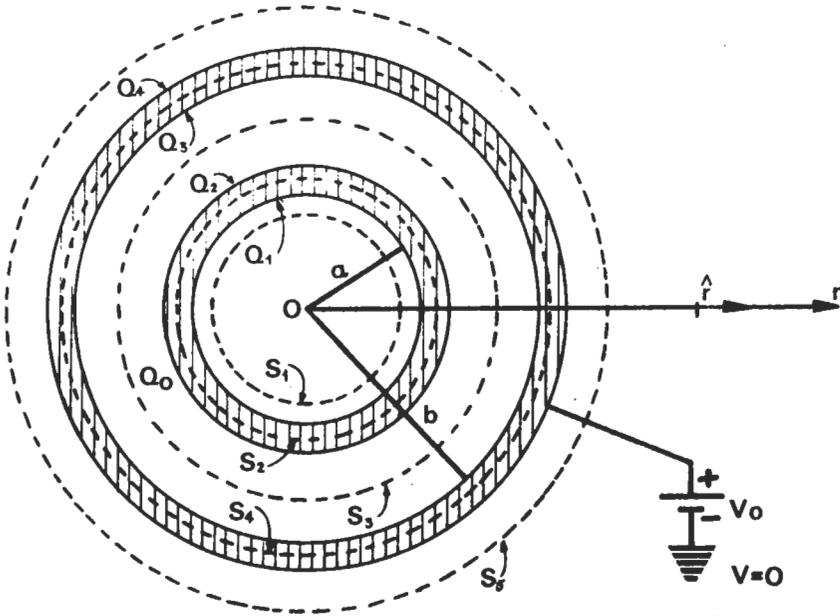


Fig. 9

Luego:

$$Q_1 = 0$$

y

$$Q_2 = Q_0$$

Apliquemos el teorema de Gauss a  $S_4$ :

$$\oiint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} = 0,$$

por la misma razón anterior; luego:

$$Q_3 = -Q_0$$

Apliquemos el teorema de Gauss a  $S_5$ :

$$\oiint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{\epsilon_0} = \frac{Q_4}{\epsilon_0};$$

por simetría esférica,  $\vec{E} = \vec{E}(r) \hat{r}$ ;

luego:

$$\oiint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

y de aquí:

$$\vec{E} = \frac{Q_4}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > b)$$

Por otra parte sabemos que la diferencia de potencial entre la armadura externa y tierra es  $V_0$ :

$$V(b) - V(\text{tierra}) = V_0 = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V_0 = - \int_{\infty}^b \frac{Q_4 dr}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V_0 = \frac{Q_4}{4\pi \epsilon_0 b}$$

luego:

$$Q_4 = 4\pi \epsilon_0 b V_0$$

(recordemos la capacidad de una esfera aislada,  $C = 4\pi \epsilon_0 b$ , y que  $Q = CV$ ).

b) Dividiremos el espacio en varias regiones.

i)  $r \leq a$  (región interior y metal de la armadura interna):

$$\oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = E \cdot 4\pi r^2,$$

$$\text{luego } \vec{E} = \vec{0}.$$

ii)  $a < r < b$  (región comprendida entre las armaduras):

$$\oiint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \quad (\text{pues } \vec{E} = E(r) \hat{r})$$

$$\text{luego: } \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

iii)  $r = b$  (metal de la armadura externa):

$$\vec{E} = \vec{0},$$

pues el campo en el interior de un conductor es siempre cero.

iv)  $r > b$  (región exterior al condensador):

es obvio que existe campo eléctrico, pues hay una diferencia de potencial entre la armadura externa y tierra (infinito);

$$\oiint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_4}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \epsilon_0 b V_0}{\epsilon_0} \quad (\text{pues } \vec{E} = E(r) \hat{r})$$

luego:

$$\vec{E} = \frac{b V_0}{r^2} \hat{r}$$

c) Es conveniente calcular primero la función potencial en la región entre las armaduras, gracias a sus condiciones de borde.

i)  $a \leq r \leq b$ :

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V(r) = - \int \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + C$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + C;$$

la constante de integración  $C$  se determina por la condición de borde:

$$V(b) = V_0$$

$$\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 b} + C = V_0$$

$$C = V_0 - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

La diferencia de potencial entre las armaduras es:

$$V(a) - V(b) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(recordemos que la capacidad de un condensador esférico es:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

y que  $Q = CV$ , en que  $V$  es el valor absoluto de la diferencia de potencial entre las armaduras).

ii)  $r \leq a$ :

el potencial de la armadura interna es:

$$V(a) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

y como no hay campo en la región interior a esta armadura, se deduce que toda esta región será equipotencial, es decir:

$$V(r \leq a) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

iii)  $r \geq b$ :

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C'$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V(r) = - \int \frac{b V_0 dr}{r^2} + C'$$

$$V(r) = \frac{b V_0}{r} + C'$$

la constante de integración  $C'$  se determina por la condición de borde:

$$V(b) = V_0$$

o bien por:

$$V(\infty) = 0;$$

ambas conducen a

$$C' = 0$$

$$V(r) = \frac{b V_0}{r}$$

II. Al cortacircuitar la batería, o sea, hacer  $V_0 = 0$ , la armadura externa estará al mismo potencial que tierra (en el infinito); en consecuencia no habrá campo fuera del condensador (sólo existe campo cuando existe una diferencia de potencial).

Los cálculos son idénticos a los anteriores, así que basta introducir en ellos la condición  $V_0 = 0$ .

d) Carga:

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = Q_0$$

$$Q_3 = -Q_0$$

$$Q_4 = 0$$

Campo:

$$r \leq a : \vec{E} = \vec{0}$$

$$a < r < b : \vec{E} = \frac{Q_0}{r^2 \pi \epsilon_0} \hat{r}$$

$$r \geq b : \vec{E} = \vec{0}$$

Función potencial:

$$a \leq r \leq b : V(r) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$r \leq a : V(r) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$r \geq b : V(r) = 0$$

Diferencia de potencial entre las armaduras:

$$V(a) - V(b) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

III. Al desconectar de tierra, sin acercar la carga  $q$  todavía, las cargas eléctricas no sufren modificación con respecto a la parte II.

e) Al acercar  $q$ , la carga total de cada armadura sigue siendo la misma por el principio de conservación de carga eléctrica.

Veamos qué pasa con  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ .

$Q_1$  seguirá siendo cero, porque

$$\oiint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = 0,$$

porque el campo en el interior de un conductor es siempre cero; luego, por conservación de carga,  $Q_2$  sigue igual a  $Q_0$ .

$Q_3$  seguirá siendo igual a  $-Q_0$ , porque:

$$\oiint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} = \frac{Q_0 + Q_3}{\epsilon_0} = 0$$

por la misma razón anterior; luego, por conservación de carga, también  $Q_4$  seguirá siendo cero.

f) La densidad de carga sí se modifica, pues la carga  $q$  introduce una asimetría en el espacio, y las cargas en los metales están libres de moverse; la carga de la armadura externa será atraída por  $q$ , y la densidad superficial tendrá un máximo (de carga negativa) en la parte de la esfera más cercana a  $q$ .

g) La situación es la siguiente:

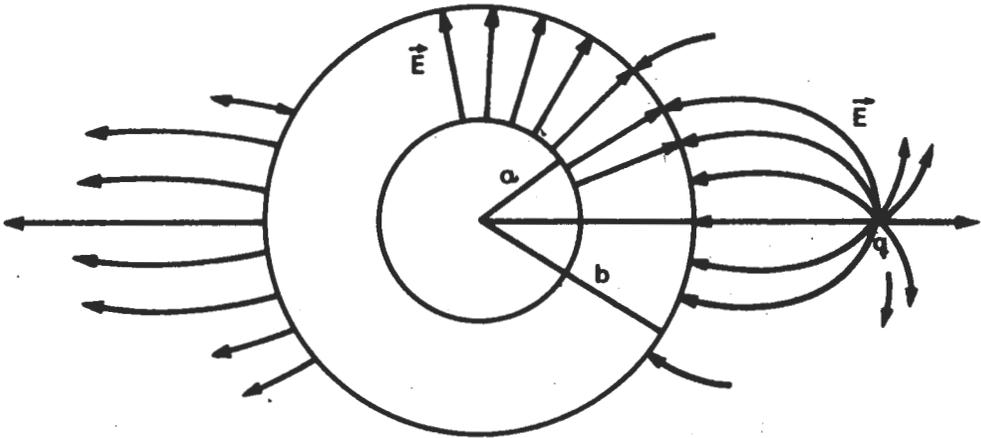


Fig. 10

La armadura externa se pondrá a un potencial distinto de cero, si es que seguimos tomando a la tierra como origen de potencial (en el infinito):

$$V(b) - V(\infty) = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(b) = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0,$$

pues  $\vec{E} \neq \vec{0}$  y no hay una simetría que pudiera anular la integral; en consecuencia,

la función potencial entre las armaduras cambiará, subiendo en la constante  $V(b)$ ; luego la diferencia de potencial entre las armaduras seguirá siendo la misma. (La capacidad del condensador esférico depende sólo de la geometría, que no ha cambiado; tampoco ha cambiado la carga de las armaduras; luego la diferencia de potencial es la misma).

**PROBLEMA 4.-**

I. Se tienen cargas  $q < 0$  en las vértices de un cuadrado de lado  $a$ .

- a) Calcular  $\vec{E}$  y  $V$  en el centro.
- b) Se coloca un tubo perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro. Una carga  $Q > 0$  puede moverse a lo largo de ella; demostrar que el centro del cuadrado es un punto de equilibrio estable para  $Q$ ; ¿por qué no se cumple el teorema de Earnshaw?

II. Se cambia de signo a dos cargas que están en vértices opuestos; calcular la energía del sistema (cuadrupolo), si el medio en que está tiene susceptibilidad  $80$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $|q| = 10^{-9} \text{ Coulomb}$ .

Resolución.

a)

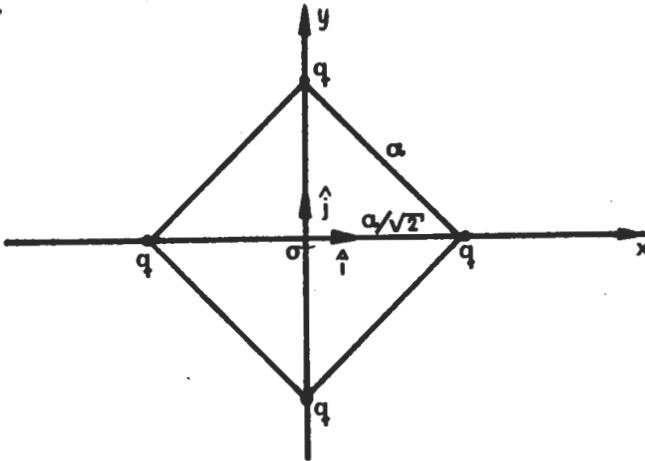


FIG. 11

$$\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\hat{i}}{a^2/2} - \frac{\hat{i}}{a^2/2} + \frac{\hat{j}}{a^2/2} - \frac{\hat{j}}{a^2/2} \right) = \vec{0} \quad (\text{hay simetría})$$

$$V(0) = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot a/\sqrt{2}}$$

$$V(0) = \frac{q\sqrt{2}}{a\pi\epsilon\epsilon_0}$$

b) Como  $Q$  está sobre el eje de simetría, la fuerza que actúa sobre ella apunta siempre hacia el centro del cuadrado; luego el centro  $O$  será un punto de equilibrio estable. Esto puede demostrarse también calculando  $\nabla^2 W$  en  $z = 0$ ;  $W$  es la energía potencial de  $Q$ :

$$V(z) = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot d}$$

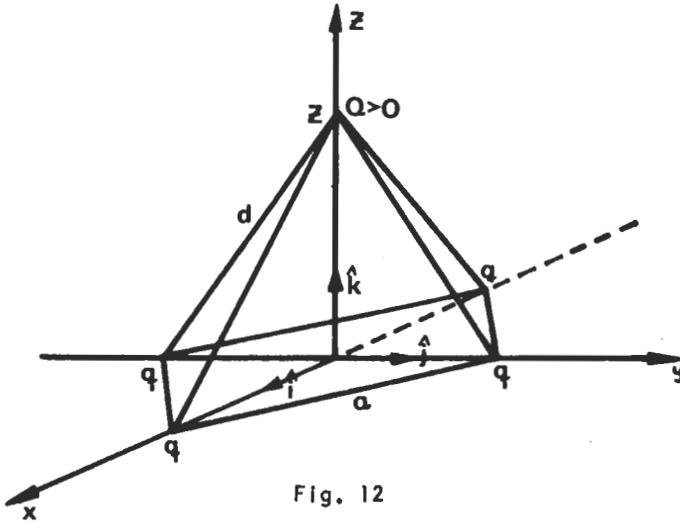


Fig. 12

$$V(z) = \frac{q}{\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$W(z) = QV(z)$$

$$W(z) = \frac{Qq}{\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 W \Big|_{z=0} = -\frac{Qq}{\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{2} \right)^{-3/2} > 0,$$

pues  $q < 0$ ; luego el equilibrio es estable en el centro.

El teorema de Earnshaw dice que en un campo electrostático no existen puntos de equilibrio estable, si sólo actúan fuerzas eléctricas. En nuestro caso no sólo actúan fuerzas eléctricas, sino que también hay fuerzas externas que mantienen a la carga Q dentro del tubo; si éste no existiera, Q estaría en equilibrio inestable, pues sería atraída por alguna de las cargas q.

Es por esta misma razón que el núcleo atómico se mantiene como tal: existen fuerzas nucleares mucho mayores que la fuerza de repulsión electrostática entre los protones.

$$II. \quad W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

$$V(A) = V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \frac{-q}{a} + \frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} \right] = \frac{q}{4\pi a\epsilon\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right]$$

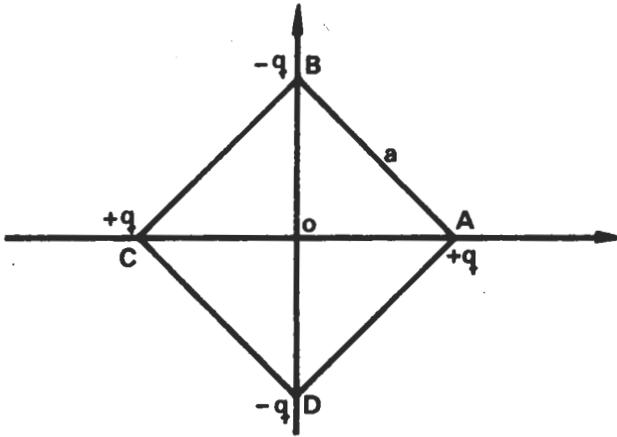


Fig. 13

$$V(B) = V(D) = \frac{1}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left[ \frac{q}{a} + \frac{q}{a} + \frac{-q}{a\sqrt{2}} \right] = \frac{q}{4\pi a \epsilon \epsilon_0} \left[ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

$$W = \frac{1}{2} \left[ q V(A) - q V(B) + q V(C) - q V(D) \right]$$

$$W = \frac{1}{2} q \frac{q}{4\pi a \epsilon \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right]$$

$$W = \frac{q^2}{2\pi a \epsilon \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right].$$

$$\epsilon = 1 + \chi = 81$$

$$q = 10^{-9} \text{ [Coulomb]}$$

$$a = 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ [Farad / m]}$$

Entonces:

$$W = - 2,87 \cdot 10^{-7} \text{ [Joule]}$$

El signo negativo de la energía quiere decir que, para formarlo, el cuadrupolo ha trabajado sobre el agente externo; esto puede verse claramente si se piensa que al dejar de actuar las fuerzas externas que mantienen el cuadrupolo formado, las 4 cargas tienden a juntarse en el centro del cuadrado.

**PROBLEMA 5.-**

I. Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad  $\lambda$  por unidad de longitud (constante). Un punto P. está a una distancia  $r$  de la distribución, y su proyección sobre la recta de carga está a las distancias  $l_1$  y  $l_2$  de sus extremos. (Ver Fig. 14)

- Calcule el campo eléctrico en P.
- Haga una primera aproximación para obtener  $E$  cuando:

$r \ll l_1 + l_2, r \gg l_1 + l_2$  y cuando  $l_1$  y  $l_2$  tienden a infinito.

II. Suponga ahora que la recta de carga es infinitamente larga, y que coincide con el eje  $Oz$  de un sistema de referencia  $Oxyz$ . (Ver Fig.15)

- Es el campo  $\vec{E}$  perpendicular a  $Oz$ ?
- Está  $\vec{E}$  contenido en el plano que pasa por  $Oz$  y por el punto de observación en cuestión?
- Depende  $\vec{E}$  de  $z$ ?
- El teorema de Gauss se demostró en clases para cargas puntuales; ¿por qué puede aplicarlo en este problema?
- Para calcular  $\vec{E}$ , Ud. aplicará el teorema de Gauss a un cilindro adecuado; dibuje el elemento vectorial de superficie  $dS$  en todas las "caras" de la superficie cilíndrica; ¿contribuyen las bases del cilindro al flujo de  $\vec{E}$  a través de él?
- Calcule  $\vec{E}$  en un punto cualquiera del espacio.
- Haga un gráfico aproximado comparando este campo con el producido por una carga puntual.
- Calcule la función potencial y fije la constante de integración; es el potencial cero en el infinito? Explique.

Justifique todas sus respuestas.

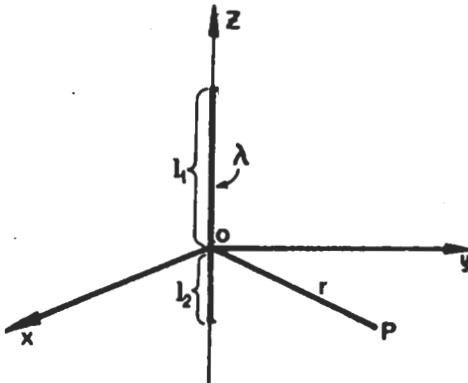


Fig. 14

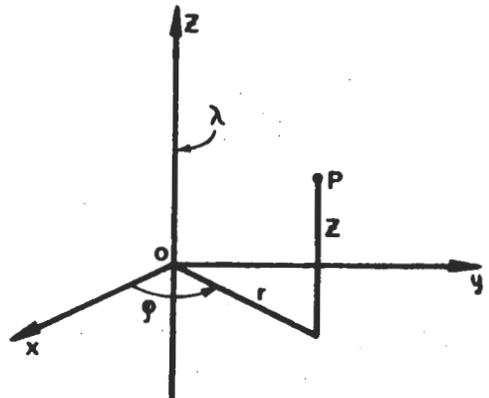


Fig. 15

**Resolución.**

I. El problema tiene simetría cilíndrica en torno al eje  $Oz$ , de modo que el campo eléctrico (en módulo) dependerá sólo de  $r, l_1,$  y  $l_2$ .

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(R)}{|\vec{R}-\vec{P}|^3} \vec{R}-\vec{P}$$

$$\vec{R}-\vec{P} = \vec{O}-\vec{P} - \vec{O}-\vec{R} = r \hat{r} - z \hat{k}$$

$$|\vec{R}-\vec{P}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dq(R) = \lambda dz$$

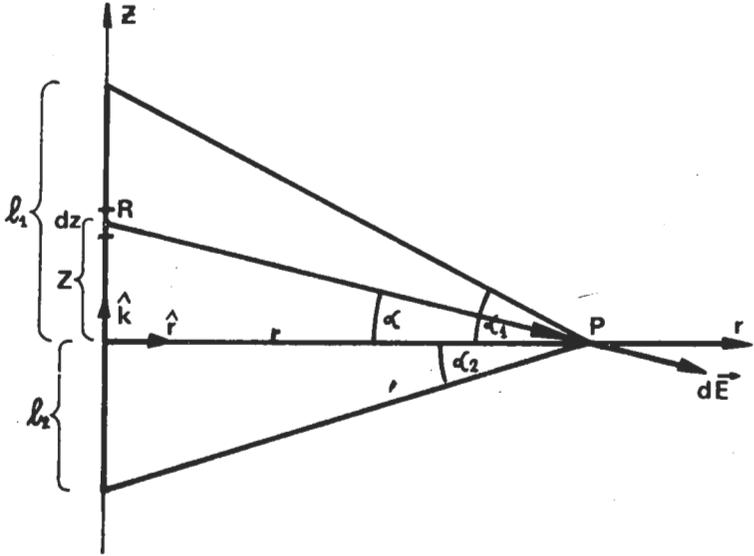


Fig. 16

La variable de integración más cómoda es el ángulo  $\alpha$ , formado por los vectores  $\vec{PR}$  y  $\vec{PO}$ ; los límites de integración serán  $\alpha_1$  y  $-\alpha_2$  (superior e inferior, respectivamente). Expresemos todas las variables que tenemos en función de  $\alpha$ :

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{r}{\sqrt{l_{1,2}^2 + r^2}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \operatorname{sen} \alpha;$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{1,2} = \frac{l_{1,2}}{\sqrt{l_{1,2}^2 + r^2}}$$

Luego:

$$\frac{\vec{RP}}{|\vec{RP}|^3} = \frac{r \hat{r} - z \hat{k}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha}{r^2 \sec^2 \alpha}$$

$$dz = \frac{dz}{d\alpha} d\alpha = r \sec^2 \alpha d\alpha$$

luego:

$$d \vec{E}(P) = \frac{\lambda r \sec^2 \alpha d\alpha}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha}{r^2 \sec^2 \alpha}$$

$$d \vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 r} [\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha] d\alpha$$

$$\vec{E}(P) = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} d \vec{E}(P)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 r} [\hat{r} (\operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1) + \hat{k} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)]$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \hat{r} \left( \frac{l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) + \hat{k} \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) \right]$$

b) i) Cuando  $r \ll l_1 + l_2$ ,

$$\begin{cases} l_2^2 + r^2 = l_2^2 \\ l_1^2 + r^2 = l_1^2 \end{cases} ;$$

luego:  $\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 2\hat{r} + \hat{k}r \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right) \right]$

ii) Cuando  $r \ll l_1 + l_2$ ,  $r^2 + l_1^2 \approx r^2 + l_2^2 \approx r^2$ ; luego:

$$\vec{E}(P) = \frac{\hat{r} \lambda (l_1 + l_2)}{r \pi \epsilon_0 r^2}$$

pero  $\lambda (l_1 + l_2) = q$ , en que  $q$  es la carga total de la distribución; luego:

$$\vec{E}(P) \approx \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

es decir, para distancias muy grandes, el campo se comporta como si se tratara de una carga puntual, tal como intuitivamente uno esperaría.

iii) Cuando  $l_1, l_2 \rightarrow \infty$  entonces

$$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

luego:  $\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \hat{r} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) + \hat{k} \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) \right]$ ,

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda\hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ii. c) El campo  $\vec{E}$  es perpendicular a  $Oz$  porque la distribución de carga es infinita y homogénea, y el espacio tiene simetría cilíndrica con respecto al eje  $Oz$ , en consecuencia, las líneas de campo serán rectas que parten perpendicularmente desde el eje  $Oz$  y llegan al infinito.

d) El campo  $\vec{E}$  está contenido en el plano que pasa por  $P$  y  $Oz$  porque las líneas de campo son radiales.

e) El campo  $\vec{E}$  no depende de  $z$ , porque la distribución de carga es infinita y homogénea (no depende de  $z$ ); en consecuencia hay invariancia frente a traslaciones paralelas a  $Oz$ .

f) Una distribución continua de carga puede considerarse como una superposición de cargas puntuales, y como en electrostática es válido el principio de superposición, el teorema de Gauss será válido también para distribuciones continuas de carga.

g) Las bases del cilindro no contribuyen al flujo de  $\vec{E}$  a través de él, porque sobre ellas,  $\vec{E} \perp d\vec{S}$ , luego  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .

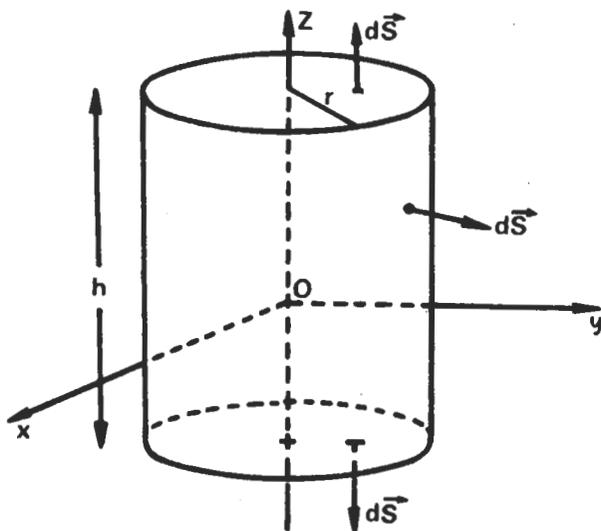


Fig. 17

h) Apliquemos el teorema de Gauss al cilindro dibujado:

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

como  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  es constantemente igual a  $E dS$  sobre la superficie del cilindro, entonces

$$\oint_{\text{cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{cil.}} E(r) dS = \int_{z=-h/2}^{h/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} E(r) \cdot r d\theta dz =$$

$$\oint_{\text{cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E r h \cdot 2\pi = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$y \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

(recuerde el resultado de la parte (i), (b), (iii).

i) En el caso de una carga puntual, el campo eléctrico depende de  $\frac{1}{r^2}$ ; el gráfico será: (Ver Fig. 18).

j) La función potencial  $V(r)$  es:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C,$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V = - \int \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} + C$$

$$V = - \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } r + C$$

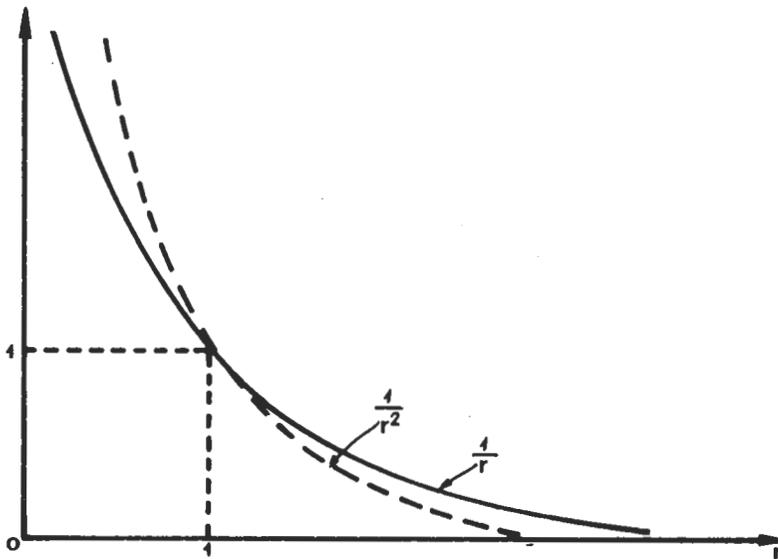


Fig. 18

La constante de Integración  $C$  puede fijarse arbitrariamente; una manera de hacerlo es la siguiente; nos fijamos que  $V$  en  $r = 1$  es  $C$ , puesto que  $\text{Log } 1 = 0$ ; en consecuencia,  $C$  representa el potencial de los puntos que están sobre el manto del cilindro de radio unitario, coaxial con  $Oz$ . El valor de  $C$  es totalmente arbitrario, por ejemplo, cero; en este caso,  $V(r)$  representa el potencial de un punto cualquiera con respecto a este cilindro unitario (en realidad, debiera decirse diferencia de potencial) tomado como origen de potenciales. El potencial en el infinito es menos infinito; sólo se puede decir que el potencial es cero en el infinito para distribuciones cuya carga eléctrica total es finita (y siempre que se escoja la constante de integración adecuada).

Nota: Hemos aplicado el teorema de Gauss para la segunda parte solamente, debido a su fuerte simetría en torno al eje  $Oz$ , sin embargo, la simetría no es una limitación para la validez del teorema. El teorema de Gauss es válido siempre, pero cuando no hay simetría, resulta bastante complicado el cálculo de  $E$  por este método; además, para poder calcular  $E$  a partir de este teorema, es necesario conocer alguna propiedad del campo antes de calcularlo, y es necesario que  $|E|$  sobre la superficie de integración no dependa de las variables que describen esta superficie, para poder sacar  $|E|$  fuera de la integral.

PROBLEMA 6.-

Se tiene un potencial  $V = \frac{k}{r}$ , en que  $k$  es una constante y  $r$  es la distancia al foco de potencial, que supondremos en el origen de coordenadas.

- Calcule  $\nabla^2 V$ . ¿Qué pasa en  $r = 0$ ?
- Defina la delta de Dirac  $\delta(r)$ , compárela con  $\nabla^2(\frac{1}{r})$  y deduzca la relación entre ambos.
- Calcule la constante introducida en (b).

d) Demuestre que  $\delta(r)$  tiene dimensiones del inverso de un volumen.

e) Escriba la ecuación de Poisson, y suponiendo  $V = \frac{k}{r}$ , calcule  $k$ .

Resolución.

a) En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , el laplaciano se escribe

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

pero  $V = \frac{k}{r}$  no depende de  $\theta$  ni  $\varphi$ ; luego:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right] = 0 \quad \text{si } r \neq 0; \end{aligned}$$

en  $r = 0$ ,  $\nabla^2 V$  diverge:  $\nabla^2 V = \infty$  si  $r = 0$ .

b) La delta de Dirac se define así:

$$\delta(r) = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

de tal modo que

$$\iiint_{\mathcal{E}} \delta(r) d\mathcal{E} = \begin{cases} 0 & \text{si el origen no pertenece a } \mathcal{E} \\ 1 & \text{si el origen pertenece a } \mathcal{E} \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 0 \\ \infty & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Luego:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \alpha \delta(r) \text{ ----- (1),}$$

en que  $\alpha$  es una constante por determinar.

c) Integremos la ecuación (1) en un volumen  $\mathcal{E}$  que contenga al origen:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{E} &= \alpha \iiint_{\mathcal{E}} \delta(r) d\mathcal{E} = \alpha \\ &= \iiint_{\mathcal{E}} \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{E} \\ &= \oint_{S(\mathcal{E})} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S}, \text{ en que } S(\mathcal{E}) \text{ es la superficie cerrada que} \\ &\hspace{15em} \text{encierra al volumen } \mathcal{E} \\ &= - \oint_{S(\mathcal{E})} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = - \oint_{S(\mathcal{E})} d\Omega = - 4\pi \end{aligned}$$

( $d\Omega$  es por definición un elemento de ángulo sólido con centro en el origen);

luego:  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = - 4\pi \delta(r)$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad \iiint_{\mathcal{V}} \delta(r) d\mathcal{V} &= 1 \implies [\delta(r)] \cdot [\text{volumen}] = \\
 &= [\text{sin dimensión}] \implies [\delta(r)] = \left[ \frac{1}{\text{volumen}} \right]
 \end{aligned}$$

e) La ecuación de Poisson es:

$$\nabla^2 v = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

pero  $v = \frac{k}{r}$

$$\text{luego } k \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$- 4 \pi k \delta(r) = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} 4 \pi k \delta(r) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho d\mathcal{V}}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$4 \pi k = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$\text{luego: } v = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r}$$

### PROBLEMA 7.-

Se tienen dos planos paralelos infinitos de ecuaciones  $z = \frac{a}{2}$  y  $z = -\frac{a}{2}$ , respectivamente. Entre ellos existe una distribución de carga de densidad  $\rho = \rho(z)$ ; fuera de ellos, el vacío. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Aplique al caso en que  $\rho$  es constante.

### Resolución.

Resolveremos el problema por varios métodos, dada su simplicidad y su fuerte simetría. Las siguientes observaciones nos serán útiles:

a) Puesto que  $\rho$  depende sólo de  $z$ , y como la distribución de carga es plana e infinita,  $\vec{E}$  será sólo función de  $z$ .

b) La distribución de carga puede suponerse compuesta por planos paralelos de espesor  $\Delta z'$  que ocupan el volumen correspondiente a la distribución; a estos planos se les puede asignar la densidad de carga  $\sigma = \sigma(z')$  de la siguiente manera:

$$\Delta q = \rho(z') \Delta x' \Delta y' \Delta z'$$

$$\Delta q = \sigma(z') \Delta z'$$

$$\sigma(z') = \rho(z') \Delta z'$$

(hemos acentuado las variables de integración para distinguirlas de las variables de observación, es decir, las que describen el punto en el que medimos el campo eléctrico).

c) Como el campo producido por un plano infinito con densidad de carga uniforme es perpendicular a él, no depende de la distancia a él, y es simétrico con respecto a él, en nuestro caso se cumplirá que:

- i)  $\vec{E}$  será colineal con  $\hat{k}$  (perpendicular a los planos);
- ii) para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será simétrico con respecto al plano  $z = 0$  (igual y de sentido contrario).
- iii) para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será constante.

(Estas dos últimas observaciones surgen del hecho que para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será la suma de los campos producidos por los planos definidos en (b); puesto que estos campos no dependen de la distancia al plano que los produce, entonces, para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ , toda la distribución de carga se comporta como un solo plano, que se obtendría juntando todos los planos en uno solo).

d) para el caso  $\rho = \text{cte.}$ , por simetría,  $\vec{E}$  será cero en el plano  $z = 0$ , y será simétrico con respecto a este plano para  $z \neq 0$ .

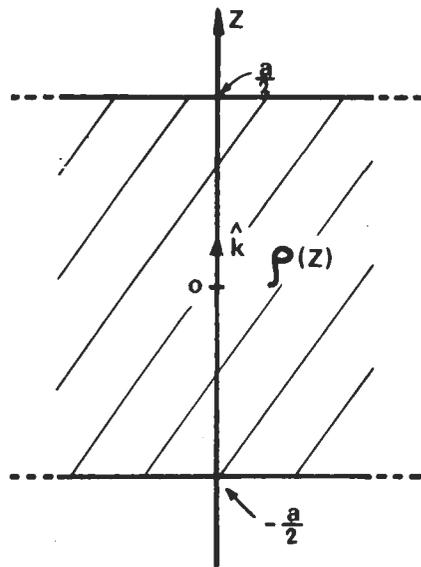


Fig. 20

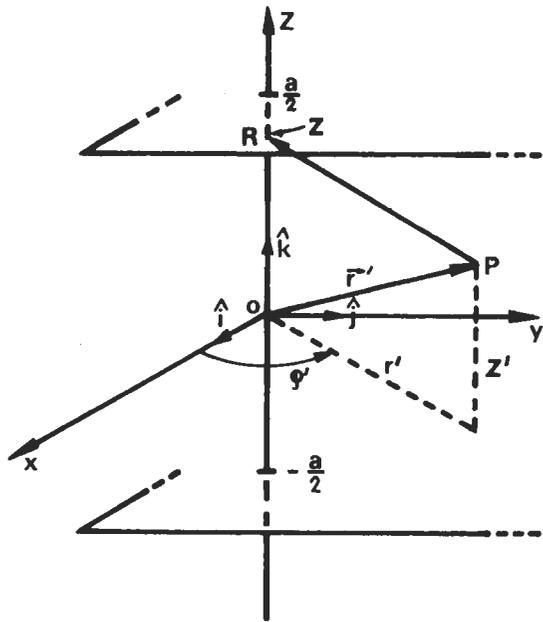


Fig. 21

Sea  $R(z)$  el punto en que queremos calcular  $\vec{E}$ ; para  $z < \frac{a}{2}$

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PR}|^3} \vec{PR}$$

$$dq(P) = \rho d\vec{\mathcal{E}}' = \rho r' dr' d\varphi' dz'$$

$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = z \hat{k} - r' \cos \varphi' \hat{i} - r' \sin \varphi' \hat{j} - z' \hat{k}$$

$$|\vec{PR}| = \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}$$

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r' dr' d\varphi' dz'}{[(z-z')^2 + r'^2]^{3/2}} \left[ (z-z')\hat{k} - r'\cos\varphi'\hat{i} - r'\sin\varphi'\hat{j} \right]$$

$$\vec{E}(z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r'=0}^{\infty} d\vec{E}(z)$$

Integrando según  $\varphi'$  resulta:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{z'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r'=0}^{\infty} \frac{r' dr' (z-z') dz'}{[(z-z')^2 + r'^2]^{3/2}}$$

Integrando según  $r'$ , queda:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{z-z'}{\sqrt{(z-z')^2}} \rho(z') dz' ;$$

$$\text{pero } \sqrt{(z-z')^2} = |z-z'| = \begin{cases} z-z' & \text{si } z > z' \\ z'-z & \text{si } z < z' \\ 0 & \text{si } z = z' \end{cases}$$

luego es necesario dividir el intervalo de integración  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  que recorre  $z'$  en 2 regiones:

$(-\frac{a}{2} \leq z' \leq z)$  y  $(z \leq z' \leq \frac{a}{2})$ ; es decir:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^z \frac{\rho(z')(z-z') dz'}{(z-z')} + \int_z^{\frac{a}{2}} \frac{\rho(z')(z-z') dz'}{(z'-z)} \right]$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^z \rho(z') dz' - \int_z^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \right] .$$

Para  $z \geq \frac{a}{2}$ ,

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' ,$$

y para  $z \leq -\frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z)$  será igual pero de signo opuesto, pues la integral debe realizarse en el otro sentido.

En el caso en que  $\rho = \text{cte.}$ :

para  $|z| \leq \frac{a}{2}$

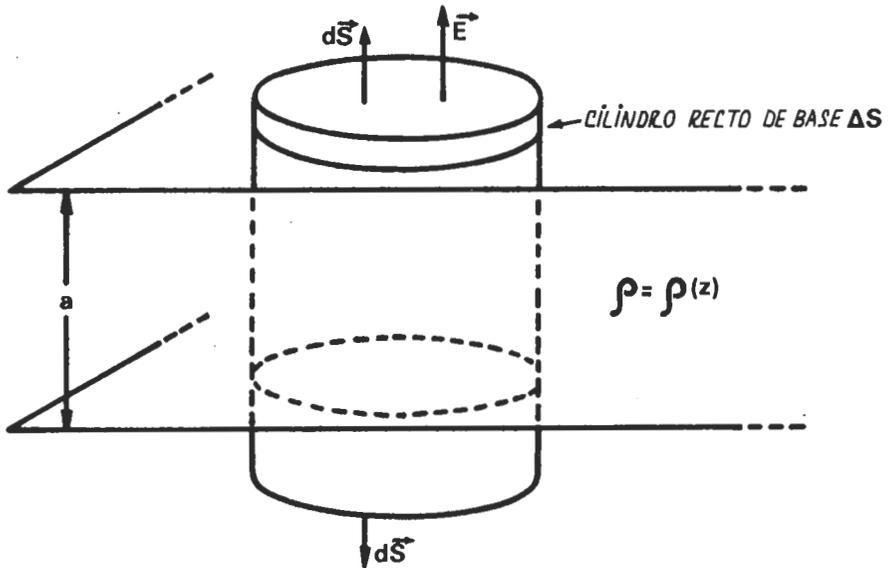
$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho}{2\epsilon_0} \left[ \rho \left( z + \frac{a}{2} \right) - \rho \left( \frac{a}{2} - z \right) \right]$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho z}{\epsilon_0} ,$$

y para  $z > \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho a}{2 \epsilon_0}$

y para  $z \leq -\frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z) = -\frac{\hat{k} \rho a}{2 \epsilon_0}$

2º Método: teorema de Gauss (para  $|z| > \frac{a}{2}$ )



Recordando las observaciones (c) y aplicando el teorema de Gauss al cilindro recto de base  $\Delta S$  de la figura:

$$\oiint_{\text{cil}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau$$

$$\text{cil} \quad 2 E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta S \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$$

luego:  $\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$  (para  $z > \frac{a}{2}$ ),

y cambia de signo para  $z < -\frac{a}{2}$ .

Este mismo método se puede aplicar para  $|z| < \frac{a}{2}$ , en el caso en que  $\rho$  es constante:

Recordando que  $\vec{E}$  es paralelo al eje Oz y la observación (d), y aplicando el teorema de Gauss al cilindro recto de base  $\Delta S$  de la figura (notamos que las bases del cilindro están a igual distancia del origen):

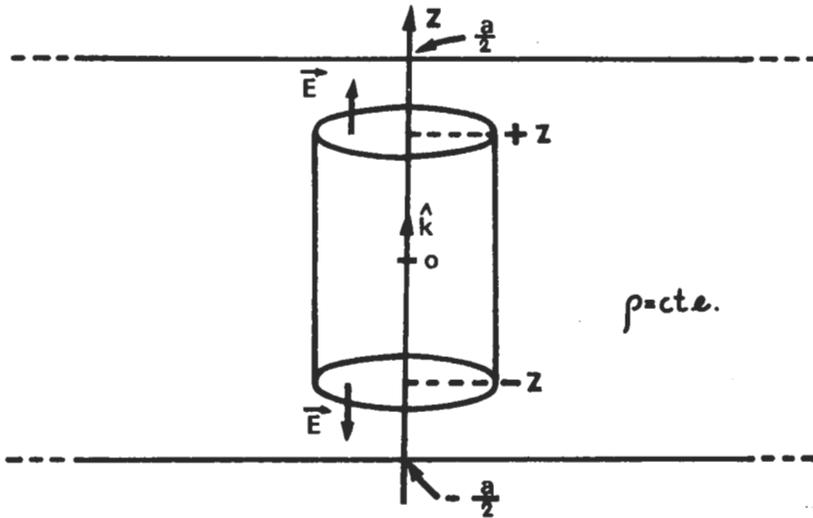


Fig. 23

$$\oiint_{\text{cil(sup)}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{cil(vol)}} \rho \, d\mathcal{V}$$

$$2E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho \cdot 2z \Delta S$$

$$\text{Luego } \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \hat{k}$$

3<sup>er</sup> Método: ecuación de Poisson, para  $\rho = \text{cte}$ , y  $|z| \leq \frac{a}{2}$

Dentro de la distribución de carga, es decir, en  $|z| \leq \frac{a}{2}$ , se tiene:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0};$$

pero  $V = V(z)$ , pues la distribución varía con  $z$  y es infinita:

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \frac{d^2V}{dz^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{dV}{dz} &= -\frac{\rho z}{\epsilon_0} + K \end{aligned}$$

Pero  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{k}$  vale cero para  $z = 0$  (ver observación (d)).

Se tiene entonces, sucesivamente:

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

$$K = 0$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

$$V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + K'$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \hat{k}$$

Este método no tiene ventaja alguna para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ , porque para determinar las constantes de integración se necesita conocer el campo eléctrico en algún punto del espacio.

4º Método: superposición de planos (para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ )

Recordando las observaciones (b) y (c), podemos reducir toda la distribución de carga a un solo plano, juntando en uno sólo todos los planos definidos en (b), de tal modo que no se pierda carga; es decir, que si tomamos un disco de área  $\Delta S$  sobre este plano y calculamos su carga ( $\sigma \cdot \Delta S$ ), ésta deberá ser igual a la carga total encerrada por un cilindro con este mismo disco de base, y de altura  $a$ , en el caso de la distribución maciza anterior:

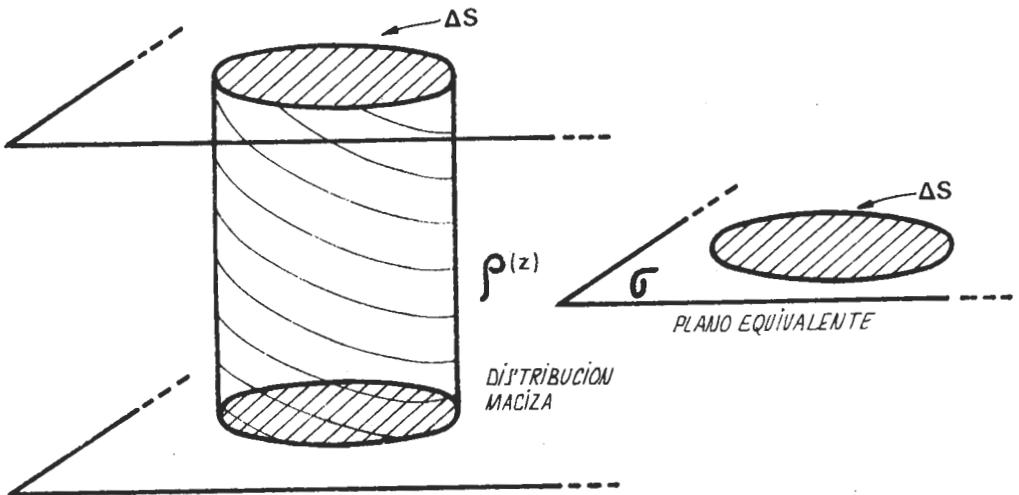


Fig. 24

$$\sigma \Delta S = \iiint_{\text{cil}} \rho(z') d\tau$$

$$\sigma \Delta S = \Delta S \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$$

$$\sigma = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$$

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro que es cortado por este plano, y recordando la observación (c):

$$\oint_{\text{cil}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

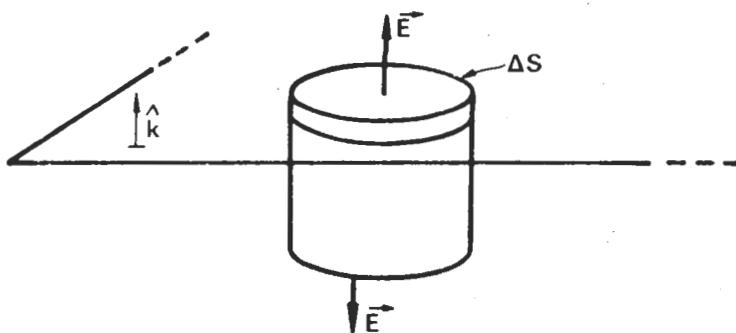


Fig. 25

$$2E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\hat{k}}{2 \epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \quad , \quad \text{para } z > \frac{a}{2} \quad ,$$

y cambia de sentido para  $z < -\frac{a}{2}$ .

PROBLEMA 8.-

Se tiene un campo eléctrico constante y uniforme en todo el espacio (vacío),  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{k}$ , en que  $\hat{k}$  es un vector unitario según el eje Oz.

Se introduce luego una esfera de material dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon$ , y de radio R. Como consecuencia de esto, el campo eléctrico se deforma. Tómese el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Llámase región I al interior de la esfera, y región II al exterior.

a) Se sabe (esto es un dato) que la solución para el potencial en ambas regiones se escribe, en coordenadas esféricas:

$$V = \begin{cases} V_I = A_1 r \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r^2} & (r \leq R) \\ V_{II} = A_2 r \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{r^2} & (r \geq R) \end{cases}$$

Calcule las constantes  $A_1, A_2, B_1, B_2$ .

b) Calcule el campo eléctrico en el interior de la esfera.

c) Calcule la densidad superficial de carga de polarización sobre la superficie de la esfera.

Resolución.

a) Para calcular las cuatro constantes, escribamos las condiciones de borde para el problema:

i) El potencial debe ser finito en todas las regiones del espacio (salvo en el infinito), pues el campo eléctrico debe estar bien definido en todas

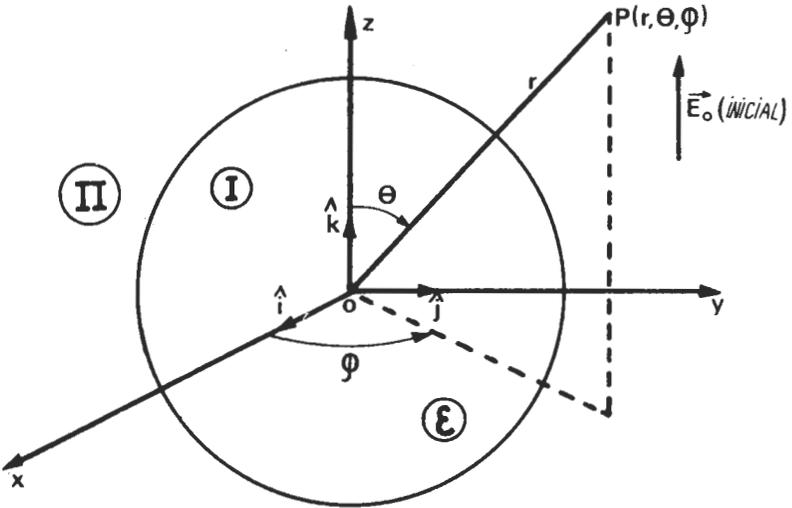


Fig. 26

ellas (no se han introducido cargas puntuales).

ii) Para las regiones del espacio muy alejadas de la esfera, la distorsión del campo producida por la esfera debe desaparecer.

iii) El potencial debe ser continuo sobre la superficie de la esfera, pues, de no ser así, el campo eléctrico estaría indeterminado sobre ella.

iv) En la superficie de la esfera, la componente normal del vector desplazamiento debe ser continua, pues allí no hay carga libre.

Con estas cuatro condiciones de borde nos será fácil calcular las constantes.

El potencial es:

$$V = \begin{cases} V_I = A_1 r \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r^2} & , r \leq R \\ V_{II} = A_2 r \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{r^2} & , r \geq R \end{cases}$$

La condición (i) implica inmediatamente:

$$B_1 = 0 \text{ ----- (1),}$$

pues, de no ser así, el potencial será infinito en  $r = 0$ .

La condición (ii) es:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E} = \vec{E}_0$$

para  $r \rightarrow \infty$ ,

$$V = V_{II} \rightarrow A_2 r \cos \theta = A_2 z$$

luego:  $\vec{E} = -\nabla V = -A_2 \hat{k}$

y esto debe ser igual a  $\vec{E}_0$  :

$$E_0 \hat{k} = -A_2 \hat{k}$$

luego:  $A_2 = -E_0$  ----- (2)

La condición (iii) es:

$$V_I(R, \theta) = V_{II}(R, \theta), \text{ para } \forall \theta.$$

$$V_I(r = R) = A_1 R \cos \theta$$

$$V_{II}(r = R) = -E_0 R \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{R^2} ;$$

igualando y simplificando por  $\cos \theta$ , resulta:

$$R A_1 = -E_0 R + \frac{B_2}{R^2} \text{ ----- (3)}$$

La condición (iv) es:

$$D_{nI}(r = R) = D_{nII}(r = R) \text{ para } \forall \theta.$$

$$\vec{D}_I = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_I = -\epsilon \epsilon_0 \nabla V_I, \text{ y lo mismo para } \vec{D}_{II};$$

$$D_{nI} = \vec{D}_I \cdot \hat{r} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial V_I}{\partial r}$$

$$D_{nII} = \vec{D}_{II} \cdot \hat{r} = -\epsilon_0 \frac{\partial V_{II}}{\partial r}$$

$$-\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial V_I}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \forall \theta$$

$$-\epsilon \epsilon_0 A_1 \cos \theta = -\epsilon_0 (-E_0 \cos \theta - 2 B_2 \frac{\cos \theta}{R^3})$$

luego:  $\epsilon A_1 = -E_0 - \frac{2B_2}{R^3}$  ----- (4)

Las relaciones (3) y (4) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $A_1$  y  $B_2$ ; resolviéndolo, resulta:

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} \text{ ----- (5)}$$

$$B_2 = \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \text{ ----- (6)}$$

y el potencial se escribirá, finalmente:

$$V = \begin{cases} V_I = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} r \cos \theta, & r \leq R \\ V_{II} = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

b) Para calcular  $E_I$ , conviene escribir  $V_I$  en coordenadas cartesianas:

$$V_1 = - \frac{3 E_0}{\epsilon + 2} z ;$$

luego:

$$\vec{E}_1 = - \nabla V_1 = - \hat{k} \frac{dV_1}{dz}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon + 2}$$

c) Se sabe que  $\sigma_p = P_n (r = R), \forall \theta$ .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_1$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_1$$

$$P_n = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_n ;$$

pero  $E_n = - \frac{\partial V_1}{\partial r}$

$$E_n \Big|_{r=R} = \frac{3E_0}{\epsilon + 2} \cos \theta$$

luego  $\sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{3E_0}{\epsilon + 2} \cos \theta$

Un rápido chequeo nos dice si hacemos desaparecer la esfera, es decir, ponemos  $\epsilon = 1$ , todas las ecuaciones nos dan los valores esperados:

$$V_1 = V_{11}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{11} = \vec{E}_0$$

$$\sigma_p = 0$$

Es interesante notar que  $\vec{E}_1$  es uniforme y colineal con  $\vec{E}_0$ , pero de módulo menor, en general,  $\epsilon > 1$ ; esto se debe al campo uniforme que las cargas de polarización sobre la superficie de la esfera producen en contra de  $\vec{E}_0$  ( $\rho_p = 0$ ). Puede definirse entonces un "campo depolarizante"  $\vec{E}_{dep}$ , como:

$$\vec{E}_{dep} \equiv \vec{E}_0 - \vec{E}_1 ;$$

también es posible definir un "factor de depolarización" L como

$$\epsilon_0 \vec{E}_{dep} \equiv L \vec{P} ;$$

en el presente problema, es fácil calcular L; en efecto,

$$\vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \vec{E}_1 = \vec{E}_0 - \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_{dep} \equiv L \vec{P} = L \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_1$$

luego:  $\vec{E}_{dep} = L (\epsilon - 1) \frac{3 \vec{E}_0}{\epsilon + 2}$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = L \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} 3 \vec{E}_0$$

luego:  $L = \frac{1}{3}$  .

También es interesante notar que el potencial fuera de la esfera está constituido por la superposición de dos términos: uno es  $-E_0 r \cos \theta = -E_0 z$ , que es el potencial debido al campo uniforme  $\vec{E}_0$  original; el otro término,

$$\frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2}$$

, que es el que da cuenta de la distorsión del

campo, es idéntico al potencial que produciría un dipolo en el origen de la esfera, si su momento dipolar  $\vec{p}$  fuese:

$$\vec{p} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 (\epsilon - 1) E_0 \hat{k}}{\epsilon + 2}$$

en efecto, el potencial producido por un dipolo de momento  $\vec{p}$  es

$$V_p(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$V_p(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

en que  $\theta$  es el ángulo que forman  $\vec{p}$  y  $\vec{r}$ ; comparando  $V_p(\vec{r})$  con el segundo término del potencial de la esfera,

$$\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1) \cos \theta}{(\epsilon + 2) r^2}$$

luego: 
$$p = \frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2}$$

y, considerando que  $\theta$  se mide a partir del eje Oz del problema, se deduce que  $p$  es colineal con  $\hat{k}$ :

$$\vec{p} = p \hat{k}$$

De este modo, el único efecto de introducir una esfera dieléctrica uniforme en un campo eléctrico uniforme, es agregar al potencial externo a ella un término dipolar con origen en su centro y orientado según el campo uniforme original.

Se deja propuesto hacer el problema en el caso de una burbuja de aire que se ha introducido en el dieléctrico de un condensador de placas paralelas.

PROBLEMA 9.-

Un condensador está formado por dos esferas metálicas de radios  $a$  y  $b$ , y cuyos centros están a la distancia  $c$ , en que  $c \gg a, b$ . Calcule su capacidad.

Resolución.

La figura correspondiente será: