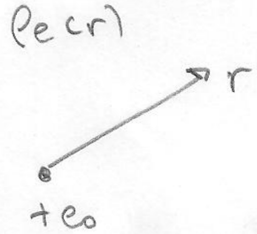
Pauta P1 - C1 - Electromagnetismo F. Parra



$$\rho_e = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

$$Q_T = -e_0$$

(a) Calculamos el campo eléctrico provocado por el electrón usando el teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}, \quad \text{con } Q_{enc} = \int_V \rho(r)\,dr$$

Como tenemos simetría esférica las integrales se resuelven como sigue

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_r \cdot r^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi = E_r \cdot r^2 \cdot 4\pi$$

$$Q_{enc} = \int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{-e_0}{\pi a^3} \cdot e^{-2r/a} \cdot r^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{-e_0}{\pi a^3} \cdot 4\pi \cdot \int_0^r e^{-2r/a} \cdot r^2$$

Lo cual se calcula usando integración por partes

$$\Rightarrow Q_{enc} = \frac{-e_0 \cancel{4\pi}}{\cancel{\pi} a^{\cancel{3}}} \cdot \frac{-\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot e^{-2r/a}\left(2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{a}{2}\cdot r + r^2\right)$$

$$= \frac{2e_0}{a^2} e^{-2r/a}\left(\frac{2a^2}{\cancel{4}} + ar + r^2\right)$$

$$= \frac{2e_0}{a^2} e^{-2r/a}\left(\frac{a^2}{2} + ar + r^2\right)$$

$$\Rightarrow E_r \cdot r^2 \cdot 4\pi = \frac{2e_0}{\quad} e^{-2r/a}\left(\frac{a^2}{2} + ar + r^2\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2e_0}{4\pi r^2 a^2 \varepsilon_0} e^{-2r/a}\left(\frac{a^2}{2} + ar + r^2\right)\hat{r}} + \text{constante}$$

ahora, calculamos el potencial eléctrico

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int \frac{2e_0}{4\pi r^2 a^2 \varepsilon_0} \cdot e^{-2r/a} \left(\frac{a^2}{2} + ar + r^2 \right)$$

$$= -\frac{2e_0}{4\pi a \varepsilon_0} \left[\overset{①}{\int dr \cdot \frac{1}{r^2} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{2} + r \right)} + \overset{②}{\frac{1}{a}\int e^{-2r/a}} \right]$$

De acuerdo a la indicación, ① se resuelve

$$\int \frac{1}{r^2} \left(\frac{a}{2} + r \right) e^{-2r/a} = -\frac{a}{2} \left[\frac{e^{-2r/a}}{r} \right]$$

Mientras que ②

$$\frac{1}{a} \int e^{-2r/a} = -\frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{2} \; e^{-2r/a} = \frac{-e^{-2r/a}}{2}$$

Evaluando y considerando que $V(\infty) = 0$

$$\Rightarrow V = \frac{-2e_0}{4\pi a \varepsilon_0} \left[-\frac{a}{2} \left[\frac{e^{-2r/a}}{r} \right] \Bigg|_{\infty} - \frac{e^{-2r/a}}{2} \Bigg|_{\infty} \right]$$

$$= \frac{2e_0}{4\pi a \varepsilon_0} \left[\frac{a}{2} \cdot \frac{e^{-2r/a}}{r} + \frac{e^{-2r/a}}{2} \right]$$

$$\boxed{V = \frac{e_0}{4\pi a \varepsilon_0} \cdot e^{-2r/a} \left[\frac{a}{r} + 1 \right]} + \text{constant}$$

(b) Ahora, calculamos el campo y potencial, y utilizando superposición, obtenemos lo deseado para el atómo

Campo Producido por el protón

$$\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E r = \frac{e_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_p = \frac{e_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r}$$

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{e_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{-e_0}{4\pi \varepsilon_0} \overset{①}{\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}}$$

$$① \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} = \left(-\frac{1}{r}\right)_{\infty}^{r} = -\frac{1}{r}$$

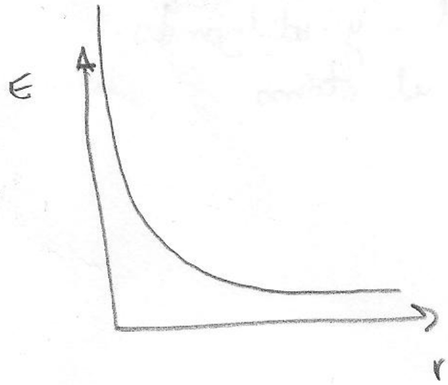
$$\Rightarrow V = \frac{e_0}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

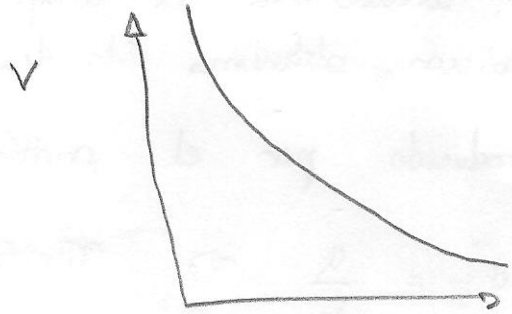
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = \frac{e_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left(e^{-2r/a} \left[1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right] + 1 \right) \hat{r}}$$

Y el Potencial

$$V = \frac{e_0}{4\pi \varepsilon_0} \left(e^{-2r/a} \left[\frac{1}{r} + a \right] + \frac{1}{r} \right)$$

Y para los gráficos, notamos que tanto el potencial como el campo divergen cuando se acercan a 0 y tienden a 0 cuando $r \rightarrow \infty$





El campo resulta ser más pronunciado que el potencial