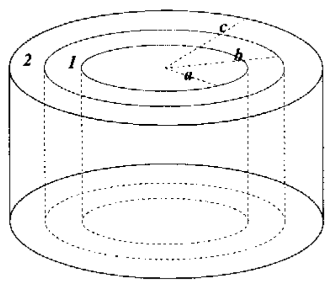
FI 33A ELECTROMAGNETISMO
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Patricio Cordero S

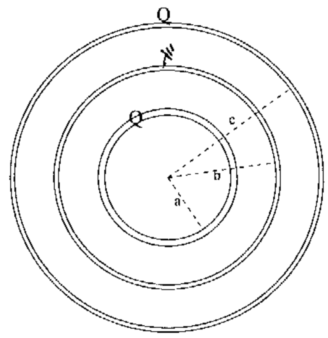
Control N° 1
Duración: 2:30 hrs
`no hay tiempo extra`
10 de abril, 2006

Presente sus resultados con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos.

P1 Entre dos superficies cilíndricas conductoras de largo infinito y de radios a y c ($a < c$) hay una diferencia de potencial V. El espacio entre estas dos superficies está lleno con dos materiales dieléctricos separados por una superficie cilíndrica de radio b. Ellos tiene constantes diléctricas ε_1 y ε_2 respectivamente. Determine la densidad de carga libre que debe haber en la interfaz si se detecta que la densidad de carga total en esa interfaz es nula. Los datos son los radios, las constantes dieléctricas y V.



P2 Se tiene tres cascarones esféricos conductores, cuyos radios exteriores son a, b y $c = 2b$ respectivamente ($a < b$). El espesor de los cascarones es d. El cascarón interior tiene carga total Q, el exterior también tiene carga total Q y el cascarón intermedio tiene diferencia de potencial nula con infinito (se dice que está *conectado a tierra*). La constante diléctrica es ε_0 en todas partes.

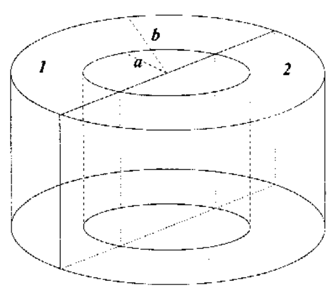


a) Obtenga la carga total en cada una de las seis superficies esféricas.

b) Determine el campo en todas partes en el límite $d = 0$.

c) Determine el potencial en todas partes en el limite $d = 0$ exigiendo que $V(\infty) = 0$.

P3 La figura representa un condensador formado por dos superficies conductoras cilíndricas de altura h y de radios a y b respectivamente. El espacio entre estos dos conductores está dividido en dos por un plano que corta verticalmente al cilindro con un plano que pasa por el eje. Estos espacios están rellenos con materiales dieléctricos con constantes ε_1 y ε_2. Calcule la capacidad de este condensador. Los datos son los dos ε_k, los dos radios y la altura h. Desprecie efectos de borde en los extremos superior e inferior ($h \gg b \gg b - a$).



sP1: Si la densidad total de carga por unidad de largo en la superficie interior es λ y la densidad de carga total en la interfaz es nula entonces el campo para $\rho > a$ siempre vale

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln\frac{b}{a}}$$

La densidad de carga de polarización en la interfaz tiene dos contribuciones, σ_{P1} y σ_{P2} las que valen

$$\sigma_{P1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,E(\rho = b)\,, \quad \sigma_{P2} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,E(\rho = b) \quad \Longrightarrow \quad \sigma_P = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{b}\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

Esto implica que la densidad de carga libre en la interfaz es

$$\sigma_\ell = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{b}\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{V}{b\ln\frac{b}{a}}$$

---

sP2: En una configuración esférica el campo en cada zona depende tan solo de la carga total encerrada

$$\vec{E}(b < r < c - d) = \frac{Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad \vec{E}(\text{exterior}) = \frac{2Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

donde Q_x es la carga del conductor intermedio. La integral del campo eléctrico desde $r = b$ hasta infinito (con $d = 0$) debe ser cero y da

$$V = \frac{Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2b}\right) + \frac{2Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2b} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = -\frac{3}{2}Q$$

Puesto que caras enfrentadas deben tener cargas opuestas (para que el campo en el interior de los conductores sea cero), la cara interior de la superficie de radio b es $-Q$ y la exterior de ese cascarón es $-\frac{1}{2}Q$ (para que sumen $-3Q/2$). A su vez esto significa que el tercer cascarón tiene carga $\frac{1}{2}Q$ en su cara interior y carga $\frac{1}{2}Q$ en la cara exterior (para que sumen Q).

Con todo lo anterior en campo eléctrico en cada una de las tres zonas no triviales es

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad -\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

El campo para $r < a$ es nulo y por tanto el potencial es una constante y los potenciales en las tres zonas que siguen pueden ser escritos, salvo por una constante

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + c_1\,, \qquad -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r} + c_2\,, \qquad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$$

El último tiene constante nula porque debe anularse en infinito. Exigiendo que el potencial es una función continua se obtiene las constantes c_1 y c_2 y resulta:

$$V(a \le r \le b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)\,, \qquad V(b \le r \le c) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2b}\right)\,, \qquad V(c \le r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$$

Se ve que se cumple continuidad en $r = b$ y en $r = 2b$ y que en $r = b$ es nulo. Para $r < a$ el potencial, por continuidad, es la constante

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

---

sP3: Los campos de desplazamiento son radiales y por tanto normales a la interfaz de radio b, lo que implica que $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$ y que $\vec{D}_3 = \vec{D}_4$

$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{\rho}\,, \qquad \vec{D}_2 = D_2 \hat{\rho}$$

Suponiendo que la carga del cilindro de radio a es Q, la integral de $\vec{D}$ en una superficie de Gauss cilíndrica de radio ρ, ($a < \rho < c$) se tiene que

$$h \left[\int_0^{\pi} D_1 \rho \, d\phi + \int_0^{\pi} D_2 \rho \, d\phi \right] = Q$$

que arroja

$$D_1 + D_2 = \frac{Q}{\pi h \rho}$$

Puesto que la componente tangencial del campo eléctrico es continua se cumple que

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

lo que implica que el campo eléctrico tiene una sola expresión

$$\vec{E} = \frac{Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi\, h} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

que implica que la dirérencia de potencial es

$$V = \frac{Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi\, h} \ln \frac{b}{a}$$

y de aquí la capacidad del condensador es

$$C = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi\, h}{\ln \frac{b}{a}}$$