Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
FI2002 Electromagnetismo

Pauta Ejercicio # 1 :FI2002-4

Electrostática - Ley de Gauss

Prof.: Gonzalo Palma
Auxs.:Francisco Parra, Jonathan Monsalve

Miércoles, 23 de Marzo de 2010

- **Problema**

Una línea semi-infinita con densidad de carga uniforme λ está ubicada sobre el eje X, con uno de sus extremos en el origen de coordenadas. Por el punto $(-D, 0, 0)$ pasa un plano, paralelo al plano YZ, con densidad de carga uniforme σ. Calcule el campo total en el punto $P = (\frac{-D}{2}, 0, 0)$. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos P y Q donde $Q = (-2D, 0, 0)$

- **Solución**

Consideremos la siguiente figura:

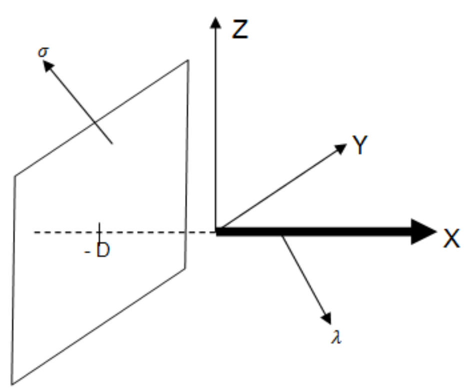

Figura 1: Ejercicio 1

El problema se hará por superposición , en donde se calculará el campo de la barra semi-infinita y el campo del plano infinito.

(a) Cálculo del campo eléctrico de la barra semi-infinita : $\vec{E_b}$

El campo de la barra semi-infinita $\vec{E_b}$ es de la forma:

$$\vec{E_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\vec{r}-\vec{r'}\lambda dl'}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^3}$$

donde los parmetros de la integral son los siguientes:$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{r'} = x'\hat{i}$, $dl' = dx'$ y la densidad de carga lineal λ. La integral a resolver es: (integramos de 0 a x_1, luego hacemos tender $x_1 \to \infty$)

$$\begin{aligned}\vec{E_b} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{x_1}\frac{(x-x')\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\ \lambda\ dx'}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\int_0^{x_1}\frac{(x-x')\hat{i}}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{(1)}+\underbrace{\int_0^{x_1}\frac{y\hat{j}}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{(2)}+\underbrace{\int_0^{x_1}\frac{z\hat{k}}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{(3)}\right]\end{aligned}$$

- Para la integral (1) se tiene que: (tomando el cambio de variable $u = (((x-x')^2+y^2+z^2)^{-1/2})$ y $du = ((x-x')((x-x')^2+y^2+z^2)^{-3/2})dx')$

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{(x-x')dx'\hat{i}}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= \left.\frac{1}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_0^{x_1}\hat{i} \\ &= \frac{\hat{i}}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{1/2}}-\frac{\hat{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

  si $x_1 \to \infty$ entonces

$$(1) = -\frac{\hat{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

- Para la integral (2) (al tomar el cambio de variables $(x-x') = a\tan\alpha$ y $a^2 = y^2+z^2$, $dx' = -a(\tan^2\alpha+1)d\alpha$)

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{ydx'\hat{j}}{((x-x')^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= \left.\frac{y(x-x')}{(y^2+z^2)((x-x')^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_0^{x_1}\hat{j} \\ &= 0\end{aligned}$$

  Note que para la integral (3) tambien es lo mismo, se anula pues al evaluar en el punto $(-D/2,0,0)$ ambas integrales tienen en el numerador un producto que se anula. Luego solo importa el resultado de la integral (1).

Luego el campo $\vec{E_b}$ tiene el siguiente valor evaluado en $(-D/2,0,0)$:

$$\vec{E_b}(-D/2,0,0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{i}}{((-D/2)^2+0^2+0^2)^{1/2}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D}$$

(b) Cálculo del campo eléctrico del plano infinito : $\vec{E_p}$

Se sabe que el campo de un plano infinito es de la forma

$$\vec{E_p} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0|x|}\hat{i}$$

y en este caso el campo es constante y de la forma :

$$\vec{E_p} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

Luego el campo total en el punto $(-D/2, 0, 0)$ es de la forma :

$$\vec{E_{tot}} = \vec{E_p} + \vec{E_b} = (\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D})\hat{i}$$

(c) Cálculo del potencial entre los puntos P y Q: En este parte ocuparemos la definición de la diferencia de potencial :

$$V_{PQ} = -\int_P^Q \vec{E_{tot}} \cdot \vec{dl}$$

Note que el elemento diferencial de línea es $\vec{dl} = dx\hat{i}$ ya que solo interesa el camino en el eje x. Luego corresponde integrar lo siguiente: (Note que las componentes en y y en z se anulan al multiplicarlas con el elemento diferencial de camino $dx\hat{i}$)

$$-\int_P^Q \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)\hat{i}\cdot dx\hat{i} \quad = \quad -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\Bigg|_{(-D/2,0,0)}^{(-2D,0,0)} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x\right|\right)\Bigg|_{(-D/2,0,0)}^{(-2D,0,0)}$$

Note que el potencial del plano es finito, pero el potencial de la barra definida en esos puntos diverge (es infinito).Luego, el potencial entre esos puntos diverge.