Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Pauta Auxiliar 1 - Pregunta 3 - Miércoles 16 de Octubre de 2010
Electromagnetismo - FI2002- Sección 4
Prof. Gonzalo Palma - Aux: Johnathan Monsalve, Francisco Parra

Problema 3
Sobre un plano indefinido se tienen dos distribuciones de carga. Una densidad superficial de carga σ sobre un círculo de radio R, y otra de signo contrario $-\sigma$ sobre el resto del plano. Usando superposición, calcular el campo eléctrico sobre Z.

Solución

Al observar el problema, nos damos cuenta que no podemos llegar y aplicar la definición de campo eléctrico. Tampoco podemos aplicar simetría para utilizar el teorema de Gauss. Por ende, en este caso, y usando el principio de superposición, transformamos esta configuración en una equivalente que sí podamos transformar. En este caso, notemos lo siguiente:

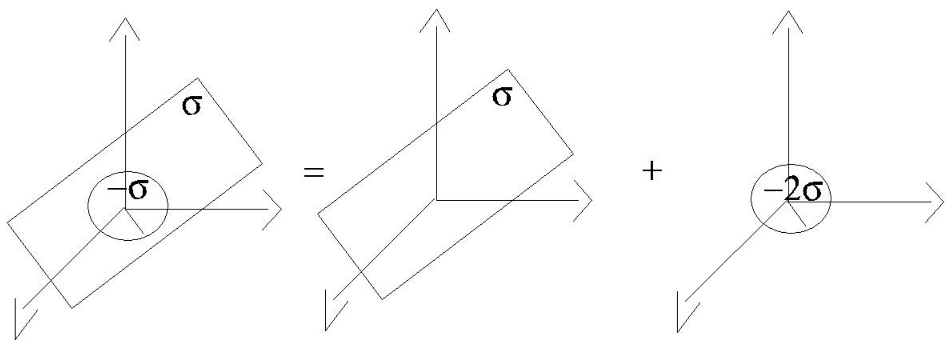

Figura 1: Aplicacion de la superposicion

Claramente, la figura nos indica lo siguiente: al lado izquierdo tenemos la configuración inicial del problema, y al lado derecho, una descompuesta en dos distribuciones. Claramente son equivalentes. Ahora, nos disponemos a calcular el campo por separado.

1) Círculo de radio R, con distribución de carga superficial -2σ.

Usando la definición de campo eléctrico (y recordando que es una distribución de carga superficial, por lo que integramos en 2d), se tiene que:

$$E_z = \vec{k} \bullet \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} ds' = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{-2\sigma z r' d\phi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Esto, ya que nos piden la componente en el eje z del campo eléctrico. Además, $\sigma(\vec{r'}) = -2\sigma$, $\vec{r} = z\vec{k}$, $\vec{r'} = r'\vec{\rho}$, $ds = r'dr'd\phi$, y $|\vec{r} - \vec{r'}|^3 = (r'^2 + z^2)^{3/2}$. Haciendo una sencilla integración, y teniendo cuidado con el signo de z, el campo queda como:

$$E_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}})$$

2) Plano infinito, con distribución de carga superficial σ

Como el plano infinito también lo podemos tratar como un círculo de radio infinito, el problema resulta ser casi idéntico al anterior. Sólo cambiamos la densidad de carga, y el límite de integración para r. Es decir:

$$E_z = \vec{k} \bullet \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} ds' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma z r' d\phi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Y usando el mismo método de integración anterior, obtenemos que:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Con esto, sumamos ambas expresiones, con lo que obtenemos la expresión final del campo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\frac{2|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} - 1)\vec{k}$$