

# Apuntes de Electricidad y Magnetismo

Constantino A. Utreras D  
Departamento de Fisica.

Julio de 1999

# Índice General

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Electrostática en el Vacío</b>              | <b>3</b>  |
| 1.1      | Nociones Fundamentales . . . . .               | 3         |
| 1.1.1    | Electrificación por Frotación . . . . .        | 3         |
| 1.1.2    | Electrificación por Inducción . . . . .        | 4         |
| 1.1.3    | Electrificación por Conducción . . . . .       | 4         |
| 1.2      | Ley de Coulomb . . . . .                       | 5         |
| 1.3      | Principio de Superposición . . . . .           | 6         |
| 1.4      | Distribuciones de Carga . . . . .              | 6         |
| 1.5      | Campo Eléctrico . . . . .                      | 8         |
| 1.6      | Cálculo de Campos Eléctricos . . . . .         | 10        |
| 1.6.1    | El Plano Infinito . . . . .                    | 10        |
| 1.6.2    | Alambre Infinito . . . . .                     | 12        |
| 1.6.3    | Esfera Sólida . . . . .                        | 13        |
| 1.7      | Líneas de Campo Eléctrico . . . . .            | 15        |
| 1.8      | Teorema de Gauss y Flujo Eléctrico. . . . .    | 16        |
| 1.8.1    | Carga puntual en $r = 0$ . . . . .             | 18        |
| 1.8.2    | Cascara esférica . . . . .                     | 18        |
| 1.8.3    | Campo de un Alambre Infinito . . . . .         | 19        |
| 1.8.4    | Plano infinito . . . . .                       | 19        |
| 1.9      | Trabajo y Energía . . . . .                    | 20        |
| 1.9.1    | Movimiento en Campo Uniforme . . . . .         | 20        |
| 1.9.2    | Modelo de Bohr . . . . .                       | 21        |
| 1.9.3    | Potencial Electrostático . . . . .             | 21        |
| 1.9.4    | Casquete esférico . . . . .                    | 22        |
| 1.9.5    | Plano Infinito . . . . .                       | 22        |
| 1.9.6    | Alambre de largo $2L$ . . . . .                | 23        |
| 1.10     | Ecuaciones de Poisson y Laplace . . . . .      | 24        |
| 1.11     | Condiciones de Borde . . . . .                 | 24        |
| 1.12     | Casquete Esférico . . . . .                    | 25        |
| <b>2</b> | <b>Conductores</b>                             | <b>27</b> |
| 2.1      | El Campo Eléctrico y los Conductores . . . . . | 27        |
| 2.1.1    | Carga puntual y Esfera . . . . .               | 28        |
| 2.2      | Teorema de Unicidad . . . . .                  | 30        |
| 2.3      | Método de Imágenes . . . . .                   | 30        |
| 2.4      | Capacidad . . . . .                            | 32        |

|          |                                                     |           |
|----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.1    | Condensador Plano . . . . .                         | 33        |
| 2.4.2    | Condensador Esférico . . . . .                      | 34        |
| 2.4.3    | Conexión de Condensadores . . . . .                 | 34        |
| 2.4.4    | Fuerza entre las placas de un Condensador . . . . . | 35        |
| <b>3</b> | <b>Electrostática en medios Dieléctricos</b>        | <b>37</b> |
| 3.1      | Experimento de Faraday . . . . .                    | 37        |
| 3.2      | Teorema de Gauss . . . . .                          | 39        |
| 3.3      | Constante Dieléctrica . . . . .                     | 40        |
| 3.4      | Campo de Ruptura . . . . .                          | 41        |
| 3.5      | Condiciones de Borde en Dieléctricos . . . . .      | 41        |
| 3.5.1    | Carga puntual en dieléctrico . . . . .              | 41        |
| 3.5.2    | Esfera conductora en dieléctrico . . . . .          | 42        |
| 3.5.3    | Carga puntual en interfase . . . . .                | 43        |
| 3.5.4    | Condensador con placa dieléctrica . . . . .         | 44        |
| <b>4</b> | <b>Energía Electroestática</b>                      | <b>47</b> |
| 4.1      | Energía de un Sistema de Cargas . . . . .           | 47        |
| 4.2      | Distribuciones continuas . . . . .                  | 48        |
| 4.3      | Sistema de Conductores . . . . .                    | 48        |
| 4.3.1    | Energía Electroestática de una Esfera . . . . .     | 49        |
| 4.3.2    | Condensador plano . . . . .                         | 49        |
| 4.3.3    | Esfera con carga superficial uniforme . . . . .     | 50        |
| 4.4      | Cálculo de Fuerzas y Torques . . . . .              | 50        |
| 4.4.1    | Sistema aislado . . . . .                           | 50        |
| 4.4.2    | Sistema a potenciales constantes . . . . .          | 51        |
| 4.4.3    | Condensador plano . . . . .                         | 52        |
| 4.4.4    | Carga puntual y plano conductor . . . . .           | 52        |
| 4.4.5    | Torque sobre un dipolo en campo externo . . . . .   | 53        |
| <b>5</b> | <b>Corriente Eléctrica</b>                          | <b>55</b> |
| 5.1      | Corriente Eléctrica . . . . .                       | 55        |
| 5.2      | Densidad de corriente . . . . .                     | 56        |
| 5.3      | Conservación de la carga Eléctrica . . . . .        | 56        |
| 5.4      | Ley de Ohm . . . . .                                | 57        |
| 5.5      | Modelo de Drude . . . . .                           | 58        |
| 5.6      | Resistencia . . . . .                               | 59        |
| 5.7      | Circuitos de Resistencias . . . . .                 | 60        |
| 5.7.1    | Conexiones Serie y Paralelo . . . . .               | 60        |
| 5.8      | Campos Eléctricos en Régimen Permanente . . . . .   | 61        |
| 5.8.1    | Ejemplo . . . . .                                   | 62        |
| 5.9      | Fuerza Electromotriz . . . . .                      | 62        |
| 5.10     | Ecuación Fundamental de Circuitos . . . . .         | 63        |
| 5.11     | Leyes de Kirchhoff . . . . .                        | 64        |
| 5.11.1   | Ejemplo . . . . .                                   | 65        |
| 5.12     | Balance de Energía y Ley de Joule . . . . .         | 65        |

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.13     | Máxima transferencia de potencia . . . . .                       | 66        |
| <b>6</b> | <b>Magnetismo</b>                                                | <b>67</b> |
| 6.1      | Ley de Biot y Savart . . . . .                                   | 67        |
| 6.1.1    | Fuerza entre dos alambres paralelos. . . . .                     | 67        |
| 6.2      | Campo Magnético . . . . .                                        | 69        |
| 6.3      | Ejemplos . . . . .                                               | 70        |
| 6.3.1    | Alambre Infinito . . . . .                                       | 70        |
| 6.3.2    | Espira Circular . . . . .                                        | 70        |
| 6.3.3    | Solenoides . . . . .                                             | 71        |
| 6.3.4    | Plano Infinito . . . . .                                         | 72        |
| 6.4      | Fuerza de Lorentz . . . . .                                      | 73        |
| 6.4.1    | Movimiento de Partículas Cargadas en Campos Magnéticos . . . . . | 73        |
| 6.4.2    | Campo Magnético Uniforme . . . . .                               | 73        |
| 6.5      | Propiedades del Campo Magnético . . . . .                        | 74        |
| 6.6      | Potencial Magnético . . . . .                                    | 75        |
| 6.7      | Aplicaciones de Ley de Ampere . . . . .                          | 76        |
| 6.7.1    | Alambre infinito . . . . .                                       | 76        |
| 6.7.2    | Cilindro . . . . .                                               | 77        |
| 6.7.3    | Potencial para Campo uniforme . . . . .                          | 77        |
| 6.8      | Expansión Multipolar de $\vec{A}$ . . . . .                      | 77        |
| <b>7</b> | <b>Propiedades Magnéticas de la Materia</b>                      | <b>79</b> |
| 7.1      | Modelo de Magnetismo . . . . .                                   | 79        |
| 7.2      | Magnetización . . . . .                                          | 80        |
| 7.3      | Susceptibilidad magnética . . . . .                              | 82        |
| 7.4      | Ferromagnetismo e Histéresis . . . . .                           | 83        |
| 7.5      | Ejemplos . . . . .                                               | 84        |
| 7.5.1    | Condiciones de Borde y Aplicación . . . . .                      | 84        |
| 7.5.2    | Solenoides rectos con núcleo de hierro . . . . .                 | 87        |
| 7.5.3    | Enrollado toroidal . . . . .                                     | 87        |
| <b>8</b> | <b>Inducción Electromagnética</b>                                | <b>89</b> |
| 8.1      | Experimento de Faraday . . . . .                                 | 90        |
| 8.2      | Ejemplos . . . . .                                               | 92        |
| 8.2.1    | Un tren eléctrico . . . . .                                      | 92        |
| 8.2.2    | Motor y Generador . . . . .                                      | 93        |
| 8.3      | Coeficientes de Autoinducción e Inducción mutua . . . . .        | 94        |
| 8.3.1    | Formula de Newmann . . . . .                                     | 95        |
| 8.4      | Ejemplos . . . . .                                               | 96        |
| 8.4.1    | Autoinductancia de una bobina . . . . .                          | 96        |
| 8.4.2    | Inductancia mutua de dos embobinados . . . . .                   | 96        |
| 8.4.3    | Efecto de transformador . . . . .                                | 97        |
| 8.4.4    | Inductancia mutua de dos espiras . . . . .                       | 98        |
| 8.5      | Inductancia como elemento de circuito . . . . .                  | 99        |
| 8.6      | Energía Magnética . . . . .                                      | 100       |

|                     |                                                                            |            |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.7                 | Energía Magnética Estática . . . . .                                       | 101        |
| 8.8                 | Cálculo de Fuerzas y Torques . . . . .                                     | 103        |
| 8.9                 | Circuitos en regimen transitorio . . . . .                                 | 103        |
| 8.9.1               | Circuito $RLC$ (en serie) . . . . .                                        | 104        |
| 8.10                | Fuente de fem alterna: $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t)$ . . . . . | 105        |
| 8.11                | Potencia . . . . .                                                         | 106        |
| <b>9</b>            | <b>Ondas Electromagnéticas</b>                                             | <b>107</b> |
| 9.1                 | Ecuaciones de Maxwell . . . . .                                            | 107        |
| 9.2                 | Flujo de Energía Electromagnética . . . . .                                | 110        |
| 9.3                 | Ondas Planas Monocromáticas . . . . .                                      | 110        |
| 9.4                 | Leyes de Reflexión y Refracción . . . . .                                  | 112        |
| 9.5                 | Ondas Planas en Medios Conductores . . . . .                               | 113        |
| 9.6                 | Radiación de Una Antena Corta . . . . .                                    | 115        |
| <b>10</b>           | <b>Repaso de Cálculo Vectorial</b>                                         | <b>117</b> |
| 10.1                | Vectores . . . . .                                                         | 117        |
| 10.2                | Coordenadas Cartesianas . . . . .                                          | 118        |
| 10.3                | Producto Escalar de Vectores . . . . .                                     | 119        |
| 10.4                | Producto Vectorial . . . . .                                               | 119        |
| 10.5                | Otros Sistemas de Coordenadas . . . . .                                    | 120        |
| 10.5.1              | Coordenadas Cilíndricas . . . . .                                          | 121        |
| 10.5.2              | Coordenadas Esféricas . . . . .                                            | 122        |
| 10.6                | Campos Escalares y Vectoriales . . . . .                                   | 123        |
| 10.6.1              | Gradiente . . . . .                                                        | 123        |
| 10.6.2              | El Gradiente en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas . . . . .              | 124        |
| 10.7                | Integración y Operadores Vectoriales . . . . .                             | 125        |
| 10.7.1              | Integral de Línea: Circulación . . . . .                                   | 125        |
| 10.7.2              | Integral de Superficie: Flujo . . . . .                                    | 126        |
| 10.7.3              | Divergencia . . . . .                                                      | 126        |
| 10.7.4              | Teorema de la Divergencia . . . . .                                        | 127        |
| 10.7.5              | El Rotor . . . . .                                                         | 127        |
| 10.7.6              | Teorema de Stokes . . . . .                                                | 127        |
| 10.7.7              | Otras Propiedades del Gradiente . . . . .                                  | 128        |
| <b>11</b>           | <b>Ejercicios y Controles Resueltos</b>                                    | <b>129</b> |
| 11.1                | Ejercicio No. 1                                                            |            |
| 24 de Marzo de 1999 | . . . . .                                                                  | 129        |
| 11.1.1              | Problema # 1 . . . . .                                                     | 129        |
| 11.1.2              | Solución Problema 1. . . . .                                               | 129        |
| 11.1.3              | Problema # 2 . . . . .                                                     | 130        |
| 11.1.4              | Solución Problema 2. . . . .                                               | 131        |
| 11.2                | Ejercicio No. 2                                                            |            |
| 7 de Abril de 1999  | . . . . .                                                                  | 132        |
| 11.2.1              | Problema 1 . . . . .                                                       | 132        |
| 11.2.2              | Solución Problema 1. . . . .                                               | 132        |

|        |                                      |     |
|--------|--------------------------------------|-----|
| 11.2.3 | Problema 2                           | 133 |
| 11.2.4 | Solución Problema 2.                 | 134 |
| 11.3   | Ejercicio No. 3                      |     |
|        | 28 de Abril de 1999                  | 136 |
| 11.3.1 | Problema 1                           | 136 |
| 11.3.2 | Solución Problema 1                  | 136 |
| 11.3.3 | Problema 2                           | 137 |
| 11.3.4 | Solución Problema 2                  | 138 |
| 11.4   | Ejercicio No. 4                      |     |
|        | 5 de Mayo de 1999                    | 139 |
| 11.4.1 | Problema 1                           | 139 |
| 11.4.2 | Solución Problema # 1                | 139 |
| 11.4.3 | Problema 2                           | 141 |
| 11.4.4 | Solución Problema # 2                | 141 |
| 11.5   | Ejercicio No. 5                      |     |
|        | 26 de Mayo de 1999                   | 143 |
| 11.5.1 | Problema 1                           | 143 |
| 11.5.2 | Solución Problema #1                 | 143 |
| 11.5.3 | Problema 2                           | 144 |
| 11.5.4 | Solución Problema #2                 | 144 |
| 11.6   | Ejercicio No. 6                      |     |
|        | 9 de Junio de 1999                   | 146 |
| 11.6.1 | Problema 1                           | 146 |
| 11.6.2 | Solución Problema #1                 | 146 |
| 11.6.3 | Problema 2                           | 147 |
| 11.6.4 | Solución Problema 2                  | 147 |
| 11.7   | Control No. 1                        |     |
|        | 12 de Abril de 1999                  | 149 |
| 11.7.1 | Problema 1                           | 149 |
| 11.7.2 | Solución Problema 1                  | 149 |
| 11.7.3 | Problema 2                           | 151 |
| 11.7.4 | Solución Problema 2                  | 151 |
| 11.7.5 | Problema 3                           | 152 |
| 11.7.6 | Solución Problema 3                  | 153 |
| 11.8   | Control #2 Electricidad y Magnetismo |     |
|        | 10 de Mayo de 1999                   | 154 |
| 11.8.1 | Problema 1                           | 154 |
| 11.8.2 | Solución Problema #1                 | 154 |
| 11.8.3 | Problema 2                           | 155 |
| 11.8.4 | Solución Problema #2                 | 156 |
| 11.8.5 | Problema 3                           | 156 |
| 11.8.6 | Solución Problema #3                 | 157 |
| 11.9   | Control # 3                          |     |
|        | 14 de Junio de 1999                  | 159 |
| 11.9.1 | Problema 1                           | 159 |
| 11.9.2 | Solución Problema 1                  | 159 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 11.9.3 Problema 2 . . . . .           | 160 |
| 11.9.4 Solución Problema 3 . . . . .  | 161 |
| 11.9.5 Problema 3 . . . . .           | 162 |
| 11.9.6 Solución Problema 3 . . . . .  | 162 |
| 11.10Examen                           |     |
| 6 de Julio de 1999 . . . . .          | 164 |
| 11.10.1 Problema #1 . . . . .         | 164 |
| 11.10.2 Solución Problema 1 . . . . . | 164 |
| 11.10.3 Problema #2 . . . . .         | 165 |
| 11.10.4 Solución Problema 2 . . . . . | 165 |
| 11.10.5 Problema #3 . . . . .         | 166 |
| 11.10.6 Solución Problema 3 . . . . . | 166 |



# Capítulo 1

## Electrostática en el Vacío

En este capítulo discutiremos los hechos más elementales de la electrostática.

### 1.1 Nociones Fundamentales

Los fenómenos eléctricos, específicamente los de electrificación estática han sido conocidos desde hace ya miles de años. Para introducirnos al estudio de estos fenómenos discutiremos algunos 'experimentos', que nos permiten, a pesar de su simplicidad, obtener algunas conclusiones importantes.

#### 1.1.1 Electrificación por Frotación

Tomemos un trozo de vidrio y un trozo de resina solidificada (ámbar), ninguno de los cuales presenta propiedades 'eléctricas'. Realicemos las siguientes pruebas con estas muestras:

- a) Frotar los dos trozos entre sí, y mantenerlos en contacto. Se observsa que no muestran 'propiedades eléctricas'.
- b) Separar las muestras. Se observa entonces que éstas se atraen mutuamente. Este es el efecto 'eléctrico' al que nos referíamos previamente; la interacción de las muestras.

Si ahora tomamos otros dos trozos, uno de vidrio y el otro de resina, y los frotamos entre sí, se observará lo siguiente:

- i Los dos trozos de vidrio se **repelen** entre sí.
- ii Los dos trozos de resina se **repelen** entre sí.
- iii El vidrio siempre **atrae** a la resina.

Este sencillo experimento nos permite concluir que existen dos clases de 'electricidad', que podemos llamar 'tipo vidrio' o 'positiva' y 'tipo resina' o negativa. Naturalmente, un solo experimento no es suficiente para establecer este hecho, pero lo aceptaremos ya que todos los experimentos realmente realizados en siglos de experimentación son compatibles con la existencia de sólo dos clases de 'electricidad'. Desde luego que no hay nada intrínsecamente positivo ni negativo en el vidrio ni el ámbar (resina), se trata sólo de una convención útil, sobre todo en el marco de la teoría que se expondrá en estos apuntes.

### 1.1.2 Electrificación por Inducción

Consideremos ahora un recipiente metálico, no electrificado, aislado. Se introduce un trozo de vidrio electrificado (carga positiva) en el interior del recipiente, sin tocarlo. Entonces, visto desde el exterior, el recipiente metálico aparece como cargado positivamente. Esta situación se puede visualizar si se suspende del recipiente un par de láminas metálicas conectadas al recipiente por medio de un hilo metálico. La situación se muestra en la figura 1.1.

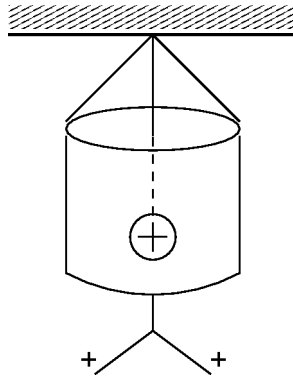


Figura 1.1: Electrificación por inducción. Un recipiente metálico, con un objeto cargado positivamente en su interior. El electroscopio muestra que la carga en el exterior es positiva.

Tomemos ahora un trozo de resina, también electrificada, y acerquémoslo al recipiente. Se observa lo siguiente:

- Hay atracción entre el trozo de resina electrificada y el recipiente, como si el recipiente estuviera cargado positivamente.
- Si se acerca un trozo de vidrio electrificado, hay repulsión.
- Si se saca el trozo de vidrio del recipiente, éste no presenta electrificación.
- El experimento puede ser repetido con un trozo de resina en su interior, con resultados similares a los ya observados.

### 1.1.3 Electrificación por Conducción

Consideremos dos recipientes metálicos (de cobre o aluminio, por ejemplo), ambos aislados entre sí. Tomemos un trozo de vidrio electrificado e introduzcámoslo dentro de uno de los recipientes -sin tocar sus paredes-. Llamemos 'A' a éste recipiente y 'B' al otro recipiente. Tomemos un trozo de alambre metálico (cobre) y unamos los recipientes A y B con él. Se observa lo siguiente:

- El recipiente B se electrifica, con carga del mismo signo que A, en este caso, positiva.
- Si se hubiera usado un hilo de algodón o seda, en vez del alambre conductor, no se habría observado carga eléctrica en B. Esto permite una primera clasificación de los materiales en **conductores**, como el cobre y **aisladores**, como el hilo de algodón o seda.

No seguiremos describiendo la multitud de experimentos que se han realizado, nos bastará con decir que estos experimentos apoyan la idea que en la naturaleza existen sólo dos tipos de electricidad, que llamamos negativa y positiva. Podemos añadir, además, dos propiedades importantes de la carga eléctrica, con el objeto de comenzar a apreciar su significado. Estas son la **conservación de la carga eléctrica**, y la **cuantización de la carga eléctrica**. Estas propiedades son, hasta donde se sabe, independientes.

- **Conservación de la Carga Eléctrica:** Significa que la carga de un sistema cerrado no cambia en el tiempo. Esta es una ley fundamental de la naturaleza, y no se conocen excepciones a ella.
- **Cuantización de la Carga Eléctrica:** A principios de siglo, Millikan realizó un experimento, que le permitió demostrar **experimentalmente**, que en la naturaleza la carga eléctrica siempre se encuentra en múltiplos de una unidad fundamental. Esta unidad es la carga de un electrón, que denotamos con la letra  $e$  y tiene el valor  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} (Cb)$ .

## 1.2 Ley de Coulomb

Resulta claro que la fuerza eléctrica entre dos objetos macroscópicos depende de su forma. Por esta razón, resulta natural preguntarse por la forma de la interacción entre objetos cuyas dimensiones sean mucho más pequeñas que cualquier dimensión relevante. La abstracción natural de este concepto es la 'carga puntual'. En 17xx, C.A. Coulomb demostró que la ley de fuerzas entre cargas puntuales -en el vacío- puede escribirse en la forma (en notación moderna):

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (1.1)$$

Aquí  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza que actúa sobre la partícula 2, con carga  $q_2$ , debida a la partícula 1, con carga  $q_1$ ;  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición de las cargas 1 y 2,  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  que va desde la carga  $q_1$  hasta  $q_2$ , y  $r_{21} = |\vec{r}_{21}|$  es la distancia entre las cargas.  $k$  es una constante de proporcionalidad, que depende de las unidades usadas para medir la fuerza.

La fuerza coulombiana posee las siguientes características (que se pueden leer de la ecuación 1.1):

- Es proporcional al producto de las cargas,  $q_1 q_2$ . Por lo tanto, la fuerza es atractiva para cargas de distinto signo, y repulsiva para cargas de igual signo.
- La fuerza depende inversamente del cuadrado de la distancia entre las cargas.

Notamos que la Ley de Coulomb (ecuación 1.1) tiene la misma forma que la Ley de Gravitación de Newton. Por lo tanto, gran cantidad de resultados son comunes a la Electrostática y la Gravitación (a la Newton).

Una observación respecto a las unidades. Si se hace un análisis dimensional de la ecuación 1.1 se tiene:

$$[F] = [k][Q]^2[L]^{-2},$$

en que hemos llamado  $[Q]$  a la dimensiones de carga eléctrica y  $[L]$  a las de longitud o distancia; llamando además  $[M]$  a las dimensiones de masa y  $[T]$  a las de tiempo. Como las dimensiones de fuerza se expresan como  $[F] = [M][L][T]^{-2}$ , tenemos

$$[k] = [M][L]^3[T]^{-2}[Q]^{-2}.$$

Las unidades de  $k$  dependen de la elección de las unidades de  $[Q]$  (y viceversa). En unidades del sistema internacional (SI) se escoje el valor

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9 (\text{farad}/m)^{-1},$$

en que  $\epsilon_0$  se denomina permitividad dieléctrica del vacío, y tiene el valor

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} (\text{farad}/m)$$

La ecuación 1.1 da la fuerza sobre la carga  $q_2$  debida a la carga  $q_1$ . Es claro que la expresión es simétrica, por lo tanto la fuerza eléctrica satisface el principio de acción y reacción (3a Ley de Newton).

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}.$$

El exponente de la Ley de Coulomb es, hasta donde se sabe hoy en día, **exactamente** 2. Esto tiene consecuencias importantes, como veremos más adelante. Experimentalmente se sabe que, si el exponente fuera de la forma  $(2 + \delta)$ , entonces  $|\delta| < 10^{-16}$ .

### 1.3 Principio de Superposición

Se ha comprobado -también experimentalmente- que las fuerzas eléctricas se comportan en forma aditiva, es decir; la fuerza eléctrica sobre una carga  $q$ , debida a un conjunto de cargas  $q_1, \dots, q_n$  es igual a la suma de las fuerzas que  $\vec{F}_i$ , que cada carga  $q_i$ , ejerce separadamente sobre la carga  $q$ , es decir:

$$\vec{F}_q = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

en que las fuerzas  $\vec{F}_i$  estan dadas por 1.1.

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1.1)$$

En la ecuación anterior las cargas  $q_i$  ocupan las posiciones dadas por los vectores  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y la carga  $q$  está en el punto  $\vec{r}$ . El principio de Superposición es conocido también como la 'regla del paralelogramo de fuerzas'.

### 1.4 Distribuciones de Carga

Consideremos el problema siguiente: Se tiene un cuerpo macroscópico, de volumen  $\Omega$ , cargado. Queremos calcular la fuerza que este objeto ejerce sobre una carga puntual  $q$ , localizada en un

punto  $\vec{r}$ . Supongamos que el volumen  $\Omega$  del cuerpo se divide en un número  $N$  de pequeños 'cubos'  $\Delta\Omega_i$ , de volumen  $\Delta\Omega_i$  y carga  $\Delta q_i$ , centrados en puntos  $\vec{r}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ .

Evidentemente,  $Q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \dots + \Delta q_N$  es la carga total del cuerpo y  $\Omega = \Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 + \dots + \Delta\Omega_N$  es su volumen. Si el número de los elementos de volumen  $\Delta\Omega_i$  tiende a infinito, mientras su tamaño tiende a cero, manteniendo las relaciones anteriores, entonces la fuerza que el **cuerpo** ejerce sobre la carga puntual puede aproximarse por la **suma o superposición** de aquellas fuerzas  $\Delta\vec{F}_i$  debidas a los elementos de carga  $\Delta q_i$ .

$$\vec{F}_q(\vec{r}) \approx q \sum_i^N \frac{\Delta q_i(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \quad (1.1)$$

en que se ha puesto  $\Delta q_i(\vec{r}_i)$  para hacer resaltar el hecho que la carga contenida en el elemento de volumen  $\Delta\Omega_i$  depende de  $\vec{r}_i$ ; en otras palabras, depende de la posición del elemento de volumen en cuestión.

Definamos la **densidad de carga** -volumétrica- en la vecindad del punto  $\vec{r}_i$  como

$$\rho(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta\Omega_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i(\vec{r}_i)}{\Delta\Omega_i} = \frac{dq(\vec{r}_i)}{d\Omega}. \quad (1.2)$$

Esta es, también, la densidad de carga promedio en un volumen  $\Delta\Omega$ , cuando este se hace muy pequeño, es decir, 'tiende a un punto'; por lo tanto  $\rho(\vec{r})$  se interpreta como la densidad de carga en la vecindad del punto  $\vec{r}$ .

Si se reemplaza  $\Delta q_i$  por  $\rho(\vec{r}_i)\Delta\Omega_i$  en la ecuación 1.1 se tiene exactamente la definición de una integral de Riemann; por lo tanto, pasando al límite se tiene

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega'. \quad (1.3)$$

En la expresión anterior hemos reemplazado el índice de suma  $i$ , por la variable continua  $\vec{r}'$ , al pasar al límite, también  $d\Omega'$  es el elemento de volumen, en las variables *vecr'*. La geometría del problema se muestra en la siguiente figura. Notar que las variables con 'prima' ( $\vec{r}'$ ) se refieren siempre a las de la 'fuente', mientras que la variable  $\vec{r}$  se refiere al punto donde se observa la fuerza, en la posición de la carga puntual  $q$ .

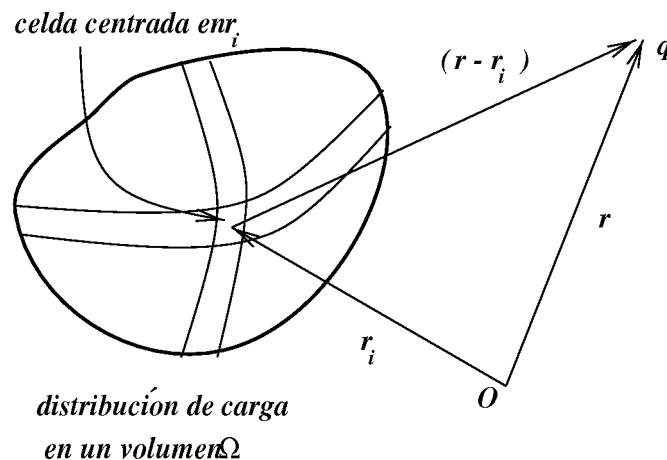


Figura 1.2: Geometría de las fuerzas sobre distribuciones de carga.

Notemos que el hecho que tratemos con una distribución de carga en volúmen no es lo más relevante de la fórmula; evidentemente podemos escribir fórmulas análogas para cargas distribuida sobre una superficie o sobre una línea. Para ello basta escribir la fuerza sobre la carga  $q$  en la forma más general:

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \int_D \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.4)$$

donde  $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')d\Omega'$  si la distribución es sobre un volúmen  $\Delta$ . También reemplazamos el volumen  $\Omega$ , por una distribución cualquiera  $D$ . Definamos ahora las distribuciones superficial y lineal de carga.

- **Densidad superficial de carga  $\sigma$ :** Suponer que la carga se halla distribuida sobre una superficie  $S$ , entonces

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S} = \frac{dq(\vec{r})}{dS} \quad (1.5)$$

- **Distribución lineal de carga  $\lambda$ :** Si la carga se distribuye sobre una línea  $L$ , entonces definimos

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta l} = \frac{dq(\vec{r})}{dl} \quad (1.6)$$

Hay que hacer una observación respecto al paso al límite en las definiciones anteriores. No se trata de un límite en el sentido matemático abstracto, ya que, según hemos dicho las cargas son por naturaleza discretas. Hay que notar que, en una distribución macroscópica arbitraria se encuentra un número muy grande, del orden de  $N_0$  partículas cargadas (aquí  $N_0$  es el número de Avogadro,  $N_0 = 6.02 \cdot 10^{23}$ ). El límite debe entenderse como sigue: La razón  $\Delta q/\Delta\Omega$  representa la densidad de carga promedio en una región  $\Delta\Omega$ . Esta región es, desde el punto de vista atómico, muy grande y, a la vez, muy pequeña desde el punto de vista macroscópico.

Usando las expresiones anteriores es muy fácil-aunque no muy útil- escribir una fórmula para la fuerza entre dos distribuciones de carga arbitrarias. Por otra parte, el hecho de tener una fórmula para las fuerzas entre dos cuerpos esconde el hecho que esta fuerza depende de una manera complicada de la distribución de carga y la forma -geometría- de los cuerpos. Además, en muchos casos, la distribución de carga no es conocida a priori - es decir,  $\rho(\vec{r})$  o  $\sigma(\vec{r})$ - es desconocida. Obviamente que en ese caso, las fórmulas que tenemos a nuestra disposición no son de utilidad. Por esta razón se introduce el concepto de **campo eléctrico**, que nos permite resolver la situación de que hablamos.

## 1.5 Campo Eléctrico

Nos restringiremos a situaciones estáticas por el momento, es decir, las cargas se encuentran en equilibrio estático. Supongamos que se desea estudiar las propiedades de una distribución de carga  $\Omega$  -en volúmen, para fijar ideas y sin pérdida de generalidad-. La única manera de explorar la propiedades eléctricas de una distribución es observando el comportamiento otras cargas en su vecindad. Lo más simple es, obviamente, tomar una carga puntual  $q$  y observar las fuerzas eléctricas sobre ella, debidas a la distribución que se desea estudiar.

Cuando un objeto cargado se aproxima a otro, se ejercen fuerzas eléctricas sobre ambos objetos. Normalmente, esto implica que las cargas en ambos objetos se redistribuirán, adquiriendo una nueva configuración de equilibrio. La excepción a esto, naturalmente, es que las cargas estén imposibilitadas de redistribuirse, esto último debe hacerse por la acción de fuerzas no eléctricas. El siguiente ejemplo puede ayudar a entender la situación.

Consideremos dos cargas puntuales, ambas de magnitud  $Q$ , una de las cuales se mantiene fija. Las cargas se encuentran unidas por un resorte de constante  $k$ . La distancia de equilibrio entre las cargas es  $a$ . Una tercera carga, de magnitud  $q$  se coloca en la línea que une las dos primeras cargas, a una distancia  $b$  de la primera carga. Calcular la nueva posición de equilibrio de la segunda carga de la figura.

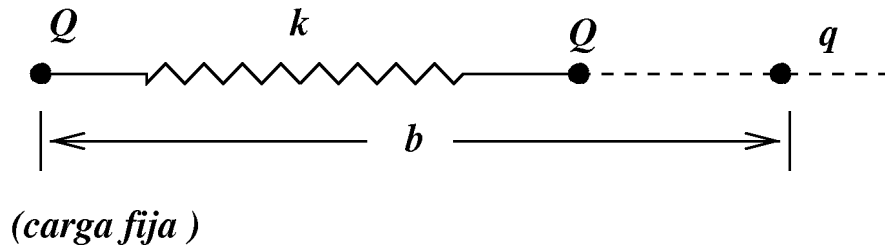


Figura 1.3: Dos cargas puntuales unidas por un resorte. La carga de la izquierda está fija.

Cuando se encuentran presentes sólo las dos cargas de magnitud  $Q$ , el equilibrio de las fuerzas es tal que

$$ka = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2},$$

de manera que  $a = Q^2/(4\pi\epsilon_0 k)$ . Si ahora consideramos lo que ocurre al acercar la carga  $q$  hasta una distancia  $b$ , tenemos que la fuerza eléctrica sobre la carga en cuestión es

$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 y^2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(b-y)^2}. \quad (1.1)$$

La fuerza mecánica, debida al resorte es  $F_m = ky$ , cuando  $q = 0$ , y  $a$  es la distancia de equilibrio. Si  $|q| \ll |Q|$ , entonces podemos escribir  $y = a + x$ , donde  $|x|$  deberá ser pequeño comparado con  $a$  y con  $(b-a)$ . Tenemos, para  $|x| \ll a$ ,

$$k(a+x) \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(b-a)^2} \left(1 + \frac{2x}{b-a}\right) \quad (1.2)$$

reordenando términos se llega al resultado, válido para  $|q| \ll |Q|$ ,

$$x \approx \frac{a^3}{(b-a)^2} \left(\frac{q}{Q}\right). \quad (1.3)$$

Este ejemplo sencillo nos ha mostrado que, en general, una distribución de carga es afectada o modificada por la presencia de una carga, u otra distribución de carga en su vecindad. Si ésta

última es una carga puntual, la magnitud de la perturbación es proporcional a la magnitud de la carga perturbadora; en este ejemplo, a  $q$  y, por lo tanto el efecto se anula cuando  $q \rightarrow 0$ .

Estas consideraciones nos llevan en forma natural a concluir que, si queremos observar una distribución de carga, debemos hacerlo usando una carga puntual de magnitud 'suficientemente pequeña', de manera que su efecto sobre la distribución sea despreciable. Hay, sin embargo, una dificultad, ya que si  $q \rightarrow 0$ , también la fuerza sobre  $q$  tiende a cero, ya que  $\vec{F}$  es proporcional a  $q$ . Evidentemente, la razón  $\vec{F}/q$  no se anula cuando  $q \rightarrow 0$  y tiene un valor bien definido, por lo tanto, definimos el Campo Eléctrico en el punto  $\vec{r}$  como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q} \quad (1.4)$$

La discusión anterior explica entonces la razón de introducir el límite en la ecuación 1.4. Una carga testigo es una carga puntual cuya magnitud es tan pequeña que su presencia no afecta la distribución de carga que se desea estudiar. Entonces, el campo eléctrico puede definirse como la razón entre la fuerza que actúa sobre una carga testigo y la magnitud de la carga testigo. La ecuación 1.4 nos permite escribir la expresión general para el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.5)$$

## 1.6 Cálculo de Campos Eléctricos

### 1.6.1 El Plano Infinito

Consideremos un plano infinito, con carga distribuida uniformemente con densidad  $\sigma = \sigma_0$  (una constante). Se quiere determinar el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Elijamos ejes de coordenadas tales que el plano cargado coincide con el plano  $xy$  (ver Figura), y llamemos  $\vec{r}$  un punto cualquiera del espacio. El campo eléctrico, en el punto  $\vec{r}$  estará dado por

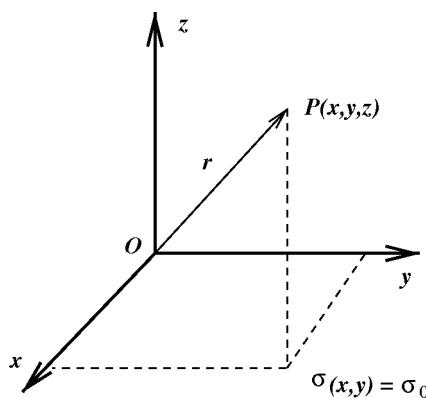


Figura 1.4: Plano infinito, con densidad de carga superficial  $\sigma(x, y) = \sigma_0$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma_0(\vec{r} - \vec{r}')dx'dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

donde hemos puesto  $\sigma(\vec{r}') = \sigma_0$  y los límites de integración son  $\mp\infty$ , además

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

corresponde a un punto del plano cargado, y

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

corresponde al punto de observación, cualquiera.

Antes de hacer los cálculos, podemos decir algunas cosas respecto al campo eléctrico, basados en la simetría del problema:

- i  $\vec{E}$  es independiente de  $x, y$ , ya que cualquier punto de observación sobre el plano 've' lo mismo (s no cambia), además
- ii  $\vec{E}$  es perpendicular al plano  $x - y$ ,  $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}$
- iii  $E(z)$  es antisimétrica,  $E(-z) = -E(z)$ .
- iv  $E(z)$  es independiente de  $z$ , ya que no existe ninguna escala natural de longitud en el problema.

Veremos como cada una de estas propiedades puede establecerse muy fácilmente. Observe-mos primero que  $\vec{r}$  es un punto fijo, por lo tanto podemos hacer el cambio de variables de integración

$$\zeta = x' - x, \quad \eta = y' - y.$$

De esta forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{(\zeta\hat{i} + \eta\hat{j} + z\hat{k})d\zeta d\eta}{(\zeta^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.1)$$

Es claro de esta expresión que  $\vec{E}(\vec{r})$  es independiente de  $x, y$ , ya que solo ha quedado  $z$  en la integración. Ahora, las componentes  $x$  e  $y$  estan dadas por la misma expresión,

$$E_x = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int d\eta \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.2)$$

$$E_y = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int d\zeta \int \frac{\eta d\eta}{(\zeta^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

Notamos que las integrales entre parentesis cuadrados son ambas nulas: La integral de una función antisimétrica entre límites simétricos es siempre cero, por lo tanto,  $E_x = E_y = 0$  en todo el espacio. La única componente no nula es  $E_z$ , la cual depende -en principio- sólo de  $z$ ,

$$E_z(z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int d\eta \int \frac{z d\zeta}{(\zeta^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.4)$$

Cambiando a coordenadas polares en el plano  $\zeta\eta$  tenemos

$$E_z(z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (1.5)$$

esta última integral es fácil de evaluar, ya que

$$\rho(\rho^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{d}{d\rho}(\rho^2 + z^2)^{-1/2},$$

luego

$$E_z(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0^2}{2\epsilon_0}(\rho^2 + z^2)^{-1/2}\Big|_0^\infty = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \frac{1}{|z|} = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \frac{1}{|z|} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{Signo}(z).$$

### 1.6.2 Alambre Infinito

Determinar el campo eléctrico debido a un Alambre infinito, con densidad de carga  $\lambda_0$  (uniforme) por unidad de longitud.

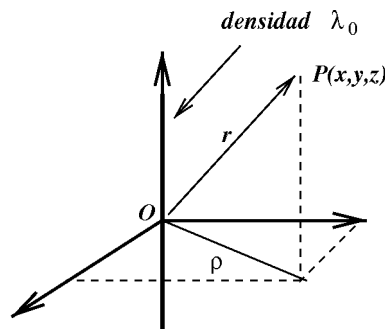


Figura 1.5: Alambre infinito, con densidad de carga lineal  $\lambda(z) = \lambda_0$ .

Veamos primero lo que nos dice la simetría del problema. Notamos que hay simetría cilíndrica: todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del alambre son equivalentes. Introduzcamos un sistema de coordenadas cuyo eje  $z$  coincida con el alambre, entonces  $\vec{E}$  satisface:

- i es perpendicular al eje  $z$ .
- ii es independiente de  $z$ .
- iii es independiente del ángulo de rotación en torno al eje  $z$  (ángulo  $\theta$ ).

Por lo tanto,  $\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho)\hat{\rho}$ . Veremos como se verifican cada una de estas propiedades. Escribamos el campo en la forma integral correspondiente

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.6)$$

donde los límites de integración son  $\pm\infty$ ; además  $\lambda_0$  se ha sacado fuera de la integral, debido a que es una constante. Los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , que indican la posición del observador y de los puntos de la fuente son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{r}' &= z'\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

El campo eléctrico se puede escribir como

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [(x\hat{i} + y\hat{j}) \int \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} + \hat{k} \int \frac{(z - z')dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}]. \quad (1.8)$$

La segunda integral se anula; mientras que la primera se evalúa con facilidad; en efecto, hagamos el cambio de variable de integración

$$z' = z + \rho \tan(\alpha),$$

donde  $z$  es fijo en la integración y  $\rho$  es la distancia del punto de observación al alambre,

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Por lo tanto tenemos  $dz' = \rho \sec^2 \alpha$ , además  $\rho^2 + (z - z')^2 = \rho^2 \sec^2 \alpha$ . Los límites de integración son  $\pm\pi/2$ , como se verifica fácilmente. Con todo esto, la integral se convierte en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} (x\hat{i} + y\hat{j}) \frac{2}{\rho^2} = \frac{\lambda_0 \rho}{2\pi\epsilon_0 \rho^2}.$$

### 1.6.3 Esfera Sólida

Determinemos el campo eléctrico debido a una esfera de radio  $R$ , con densidad de carga uniforme  $\rho_0$ .

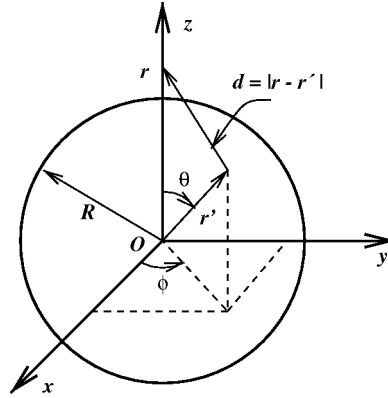


Figura 1.6: Esfera sólida, de radio  $R$ , con densidad de carga uniforme  $\rho(x, y, z) = \rho_0$ .

Para calcular el campo eléctrico en un punto arbitrario, a una distancia  $r$  del centro de la esfera, observamos que por simetría el campo eléctrico debe ser 'radial', es decir, su dirección debe coincidir con la de la recta que pasa por el origen y el punto de observación; además, debe depender sólo de  $r$  y no de su dirección ( $\vec{r}$ ). Como el punto de observación es fijo, llamemos eje  $z$  al que coincide con la dirección antes mencionada, por lo tanto,

$$\vec{r} = r\hat{k}, \quad \vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}. \quad (1.9)$$

Introduciendo coordenadas esféricas tenemos

$$x' = r' \sin \theta \cos \phi$$

$$y' = r' \sin \theta \sin \phi$$

$$z' = r' \cos \theta.$$

donde,  $0 < r' < R$  para los puntos de la distribución de carga. Podemos escribir también  $\vec{r}' = r' \sin \theta \hat{\phi} + r' \cos \theta \hat{k}$ . Con todo esto tenemos

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{((r - r' \cos \theta)\hat{k} - r' \sin \theta \hat{\phi})}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{3/2}} r'^2 \sin \theta d\theta d\phi dr'$$

Observamos de inmediato que hay dos integrales triviales

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{\phi} d\phi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \hat{k} d\phi &= 2\pi \hat{k}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

además

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(r - r' \cos \theta) r'^2 \sin \theta d\theta dr'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{3/2}}$$

Esta última integral es un poco difícil, y requiere de un 'truco' para resolverla. Notamos que

$$(r - r' \cos \theta)(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-3/2} = \frac{d}{dr}(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-1/2},$$

luego tenemos

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0 \hat{k}}{2\epsilon_0} \frac{d}{dr} \int_0^R \int_0^\pi (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-1/2} r'^2 \sin \theta d\theta dr'$$

La integral angular se hace fácilmente ahora, el resultado final es (los detalles se dejan como ejercicio).

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad \text{si } r < R \\ &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{si } r < R \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se deja como ejercicio calcular el campo eléctrico producido por una superficie esférica con carga uniformemente distribuída sobre su superficie, usando el mismo método que en el ejemplo anterior.

Una conclusión importante es que, para una distribución de carga con carga total finita  $Q$ , el campo eléctrico a grandes distancias de la distribución de carga es como el campo de una carga puntual de magnitud  $Q$ , más algunas correcciones; si llamamos  $d$  al tamaño de la distribución (la zona donde existe carga), entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad , \text{ para } r \gg d. \quad (1.12)$$

Si la carga total de la distribución es infinita, como el caso de un plano infinito, entonces el resultado anterior no es válido.

## 1.7 Líneas de Campo Eléctrico

Dada una distribución de cargas, en cada punto del espacio existe un campo eléctrico. Definimos las líneas de campo eléctrico como aquellas líneas cuya tangente es paralela al campo eléctrico en cada punto.

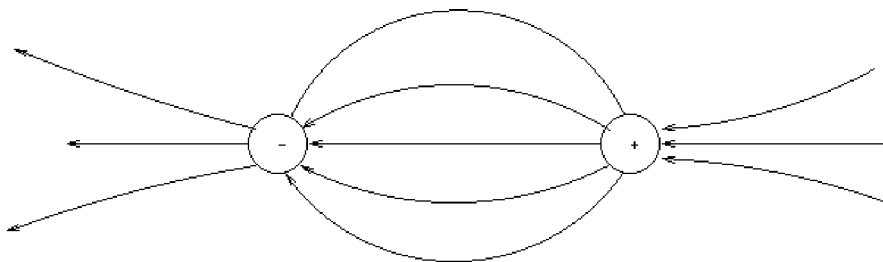


Figura 1.7: Líneas de campo eléctrico, entre dos cargas de signo opuesto.

De acuerdo a esta definición, si  $\hat{t}$  es el vector tangente a la línea de campo, entonces se tiene  $\hat{t} = d\vec{r}/ds$  (vector tangente a una curva dada,  $s$  es la longitud de arco). La definición nos dice que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{E}(\vec{r})}{|\vec{E}(\vec{r})|} \quad (1.1)$$

Como ejemplo simple, calculemos las líneas de campo eléctrico de una carga puntual positiva,  $q$ , localizada en el origen de coordenadas. Como  $\vec{E}$  es paralelo a  $\hat{r}$ , entonces

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{r}.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{E_y}{E_x} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{E_z}{E_x}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

lo cual da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}, \quad (1.3)$$

que se integran fácilmente, dando  $y = c_1 x$ ,  $z = c_2 x$ , para valores arbitrarios de  $c_1$  y  $c_2$ . Por lo tanto, la solución encontrada corresponde a una familia de rectas que pasan por el origen, donde está ubicada la carga puntual en cuestión.

Dado que las líneas de campo no tienen una dirección propia, por ejemplo, las líneas de campo recién calculadas son las mismas independiente del signo de la carga, se adopta la convención que 'las líneas de campo salen de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas'.

## 1.8 Teorema de Gauss y Flujo Eléctrico.

El concepto de flujo tiene su origen en problemas de mecánica de fluidos, como una manera de cuantificar la cantidad de fluido que sale o entra por una determinada superficie por unidad de tiempo. En electrostática el flujo no mide nada 'material'; sin embargo, se puede imaginar que se mide el flujo de un 'fluido eléctrico'. Hay que tener cuidado de no llevar la analogía demasiado literalmente. Con esta salvedad, definimos el flujo del campo eléctrico a través de una superficie  $S$  como

$$\psi = \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} \quad (1.1)$$

Normalmente, es interesante considerar solo flujos eléctricos a través de superficies cerradas. Notemos la siguiente propiedad del campo eléctrico de una carga puntual:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad , \text{ para } \vec{r} \neq 0 \quad (1.2)$$

Esta propiedad se demuestra muy fácilmente por diferenciación. En efecto, el campo de una carga puntual es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Calculemos la divergencia de  $\vec{E}(\vec{r})$ ,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En detalle, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (r^{-3} - 3x^2 r^{-5}) \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (r^{-3} - 3y^2 r^{-5}) \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (r^{-3} - 3z^2 r^{-5}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

sumando tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (3r^{-3} - 3(x^2 + y^2 + z^2)r^{-5}) = 0, \text{ para } \vec{r} \neq 0. \quad (1.4)$$

Consideremos ahora una superficie cerrada  $S$ , y calculemos el flujo de  $\vec{E}$  a través de  $S$ ,

$$\psi(S) = \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S}, \quad (1.5)$$

según el Teorema de la Divergencia, tenemos

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\Omega,$$

donde  $\Omega$  es el volúmen limitado por  $S$ . Por lo tanto, si no hay ninguna carga puntual en  $\Omega(S)$ , entonces el flujo a través de  $S$  es cero, porque

$$\psi(S) = \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\Omega = \int_{\Omega} 0 \cdot d\Omega = 0$$

este hecho nos permite decir que el flujo a través de la superficie que encierra a la carga puntual  $q$  es independiente de la forma de la superficie; por lo tanto podemos usar cualquier superficie para calcularlo. Tomemos entonces una superficie esférica,

$$\psi(S) = \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S},$$

donde ahora  $d\vec{S}$  es el elemento de área de una esfera de radio  $R$  que contiene a la carga puntual (y que elegimos concentrica),

$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

con lo que se obtiene, que el flujo es independiente de la superficie, y tiene el valor

$$\psi(s) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Resultado:**  $\psi(S)$  -el flujo del campo eléctrico- es independiente de la superficie usada para calcularlo, y vale

$$\begin{aligned} \psi(S) &= \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{si } q \in \Omega(S) \\ &= 0 \quad \text{si } q \notin \Omega(S) \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Generalización:** Si se tiene un conjunto de cargas puntuales, entonces, por el principio de superposición,  $Q(S) = q_1 + q_2 + \dots + q_n$  y

$$\psi(S) = (\text{cargatotal} \in \Omega(S)) / \epsilon_0 = \frac{Q(S)}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

Para una distribución de cargas cualquiera, tenemos

$$Q(S) = \int dq \quad (1.8)$$

Si la distribución es en volúmen,  $\rho(\vec{r})$ , tenemos  $Q(S) = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) d\Omega$ , por lo tanto tenemos el Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) d\Omega \quad (1.9)$$

Notemos que la superficie  $S$  es completamente arbitraria y, además, que podemos escribir

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\Omega = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) d\Omega,$$

o bien

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})) d\Omega = 0,$$

que conduce a la 'forma diferencial de la ley de Gauss',

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (1.10)$$

Las expresiones 1.9 y 1.10 son equivalentes; ambas son válidas en general. La forma integral del Teorema de Gauss es útil, en algunos casos, para calcular el campo eléctrico; sin embargo, ésta es mas bien la excepción, ya que se requiere que el problema a tratar tenga gran simetría, como las que consideraremos a continuación.

Una observación importante es que el teorema de Gauss depende en forma crucial en el hecho que el exponente en la Ley de Coulomb sea exactamente '2', y no algo diferente.

### 1.8.1 Carga puntual en $r = 0$

Consideremos una superficie esférica de radio  $r$ , que encierra a la carga y tiene su centro en la posición de la carga ( $q$ ). El problema tiene simetría esférica, es decir, el campo eléctrico depende solo de  $r$  y está dirigido radialmente

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

El flujo, a través de la esfera de radio  $r$ , de un campo que satisface las condiciones anteriores es  $\psi(R) = 4\pi r^2 E(r)$ , lo cual debe ser igual a la carga encerrada por la esfera de radio  $r$  (dividida por  $\epsilon_0$ ), luego

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0},$$

finalmente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Este resultado era ya conocido por nosotros, pero es bueno ver como se obtiene con las nuevas herramientas a nuestra disposición.

### 1.8.2 Cascara esférica

Se tiene una cáscara esférica (hueca) de radio  $R$ , con carga distribuída uniformemente sobre su superficie con densidad  $\sigma_0$ .

El campo tiene simetría esférica, por lo tanto, al igual que en el ejemplo anterior, tenemos  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ , por lo tanto, tomando una superficie gaussiana de radio  $r$ , se tiene  $\psi(R) = 4\pi r^2 E(r)$ . Hay dos casos que considerar, que son : (a)  $r < R$  y (b)  $r > R$ .

a) Para  $r < R$ . En este caso, la carga en el interior de la superficie gaussiana es cero, luego

$$E(r) = 0 \quad \text{para } r < R$$

- b) Para  $r > R$ . En este caso, la carga encerrada es  $Q = 4\pi R^2 \sigma_0$ , la carga total del casquete esférico, luego

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{para } r > R.$$

El resultado sorprendente aquí es que el campo en el interior del casquete esférico es cero. Una carga puntual colocada dentro del casquete no experimentará fuerza eléctrica alguna (fuerza cero), en cualquier parte del interior que se encuentre (no sólo en el centro).

### 1.8.3 Campo de un Alambre Infinito

Se tiene un alambre muy largo con carga  $\lambda_0$  (uniforme) por unidad de longitud. Determinemos el campo eléctrico usando el teorema de Gauss.

En primer lugar, la simetría del problema indica que usemos coordenadas cilíndricas, con eje de simetría coincidente con el eje  $z$  de las coordenadas, y llamemos  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  la distancia de un punto al eje  $z$ ,  $\hat{r}$  un vector unitario cuya dirección va desde el eje  $z$  al punto de observación. Con esto, el campo se expresa en la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}.$$

Consideramos una superficie gaussiana  $S$ , consistente en un cilindro de altura  $h$  y radio  $r$ , coaxial con el alambre. Entonces, el flujo del campo eléctrico es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r),$$

que debe ser igual a la carga total encerrada por la superficie,  $Q(S) = h\lambda_0$ . Entonces tenemos

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi r}.$$

### 1.8.4 Plano infinito

Un plano infinito, con carga  $\sigma_0$  (uniforme). Determinemos el campo eléctrico, usando el teorema de Gauss. Comenzamos considerando la simetría del problema, que indica que debemos usar coordenadas cartesianas. Hacemos coincidir el plano coordenado  $xy$  con el plano cargado, y  $z$  es el eje perpendicular al plano. Entonces, el campo debe tener la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}.$$

De esta manera, el campo es independiente de  $(x, y)$ . Además, debe ser antisimétrico, es decir

$$E(-z) = -E(z).$$

Usamos entonces una superficie gaussiana consistente en un cilindro de altura  $2z$  ( $z > 0$ ), con tapas en  $+z$  y  $-z$ , y radio  $R$ . El flujo es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Como hemos dicho, el campo es perpendicular al manto, por lo cual el flujo correspondiente es cero, mientras que el flujo sobre las tapas vale

$$\int_{tapas} \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\pi R^2)(E(z) - E(-z)) = (\pi R^2) \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Entonces el campo tiene el valor

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Theta(z),$$

en que la función  $\Theta(z) = 1$  si  $z > 0$  y  $\Theta(z) = -1$  si  $z < 0$ .

## 1.9 Trabajo y Energía

Consideremos primero el problema del movimiento de cargas en campos eléctricos estáticos (electrostáticos, para abreviar). Tomemos una carga testigo  $q$  en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ . De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene (movimiento no relativista),

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.1)$$

Como problema de mecánica esto se reduce a resolver la ecuación 1.1, con las condiciones iniciales apropiadas. Hay, sin embargo, algunos resultados de gran simplicidad y elegancia, que se cumplen bajo ciertas condiciones. En efecto, si la ecuación 1.1 se multiplica escalarmente por  $d\vec{r}/dt$ , y se integra entre  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} dt = q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt,$$

por lo tanto

$$\frac{m\vec{v}^2(t_2)}{2} - \frac{m\vec{v}^2(t_1)}{2} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.2)$$

La ecuación 1.2 no es otra cosa que el teorema de Trabajo y Energía, especializado a fuerzas eléctricas.

### 1.9.1 Movimiento en Campo Uniforme

Una carga puntual (carga  $q$  y masa  $m$ ) se lanza con velocidad  $v_0 \hat{i}$  en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{j}$ . Determinar la deflexión vertical  $\delta$  que ha experimentado después de viajar una distancia horizontal  $D$ .

La componente horizontal de la velocidad no cambia, puesto que no hay fuerza en la dirección horizontal; por lo tanto, la partícula demora un tiempo  $T$  en recorrer la distancia  $D$ , donde

$$T = D/v_0.$$

La componente  $y$  de la velocidad es  $v_y(t) = qE_0 t/m$ . El desplazamiento vertical es  $y(t)$ ,

$$y(t) = qE_0 t^2 / (2m),$$

por lo tanto, en  $t = T$  tenemos

$$\delta = y(t = T) = \frac{qE_0 D^2}{2mv_0^2}.$$

### 1.9.2 Modelo de Bohr

Un electrón (carga  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{Cb}$  y masa  $m$ ) se mueve en presencia de un protón (carga  $+e$  y masa  $M$ ,  $M \gg m$ ). Determinar la energía total, velocidad orbital y momentum angular en una órbita circular de radio  $R$ .

Propuesto como ejercicio. Investigar el modelo atómico de Bohr.

### 1.9.3 Potencial Electrostático

Sabemos por mecánica que, si una partícula se mueve en un campo de fuerzas **conservativas**, entonces la integral de línea en la ecuación 1.2 satisface algunas propiedades interesantes, las cuales se cumplen en el caso de las fuerzas eléctricas.

i) La integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

es independiente de la trayectoria de la partícula, es decir, no depende de  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

ii) El ‘rotor’ de  $\vec{E}(\vec{r})$  es siempre cero:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

iii) La integral de línea

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0,$$

sobre una trayectoria cerrada cualquiera es siempre cero.

iv) Existe una función escalar  $V(\vec{r})$  tal que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}).$$

Todas las propiedades anteriores son **equivalentes**. Para demostrarlo, consideremos primero el campo eléctrico de una carga puntual  $q$ , situada en  $\vec{r} = 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Encontremos el potencial  $V(\vec{r})$  de una carga puntual; para lo cual debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r}) &= -E_x(\vec{r}) = -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial y}(\vec{r}) &= -E_y(\vec{r}) = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z}(\vec{r}) &= -E_z(\vec{r}) = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para resolver estas ecuaciones, observemos que  $\partial r / \partial x = x/r$ , además  $\partial(1/r) / \partial x = -x/r^3$ , y similarmente para las derivadas respecto a  $y$  y  $z$ ; por lo tanto

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + c,$$

en que  $c$  es una constante de integración. Por lo tanto  $V(\vec{r})$  existe (lo hemos encontrado explícitamente). Es fácil ver que las otras propiedades son también ciertas. Nosotros no lo demostraremos, sino que procederemos a construir, usando el principio de superposición, el potencial para una distribución de carga arbitraria.

Si tenemos un sistema de cargas puntuales  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , ubicadas en las posiciones  $r_1, \dots, r_N$ , el potencial electrostático de esta distribución es

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|r-r_2|} + \dots + \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0|r-r_N|} + c \quad (1.4)$$

En general, para una distribución cualquiera, se deberá sumar sobre la distribución ( $D$ )

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + c, \quad (1.5)$$

Observar que la constante  $c$  no queda determinada por la definición dada, por lo tanto, se puede elegir a gusto. En muchos casos una elección conveniente es tomar el potencial en  $r = \infty$  como cero, lo cual da  $c = 0$ . Hay que notar, sin embargo, que hay situaciones en que no es posible hacer la elección anterior; esto ocurre en ciertos casos 'patológicos', en que la distribución de carga tiene carga total infinita.

### 1.9.4 Casquete esférico

Se tiene un casquete esférico de radio  $R$ , con carga superficial  $\sigma = \sigma_0$ . Determinar el potencial electrostático en todo el espacio.

Podemos comenzar por determinar el campo eléctrico por el teorema de Gauss,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r},$$

donde  $E(r) = 0$  para  $r < R$ , y  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , para  $r > R$ . Para calcular  $V(r)$  usamos la definición de  $V(r)$ ,  $dV/dr = -E(r)$ . Se obtiene

$$V(r) = V_1 \quad \text{para } r < R, \quad \text{y} \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_2 \quad \text{para } r > R.$$

Imponemos que el potencial sea cero en el infinito, luego tenemos  $V_2 = 0$ ; y que  $V(r)$  sea continuo al atravesar la superficie  $r = R$ , lo que nos da

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Se puede resolver este problema sin recurrir al conocimiento previo del campo eléctrico; para lo cual se puede integrar directamente, usando la fórmula 1.5. Se deja como ejercicio verificar que se obtiene el mismo  $V(r)$  por ambos métodos.

### 1.9.5 Plano Infinito

Se tiene un plano infinito cargado con carga  $\sigma = \sigma_0$ . El plano coincide con el plano  $xy$ .

El campo eléctrico ha sido calculado previamente por integración directa, de manera que podemos usar la definición,  $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$ , que en este caso nos da

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dz} &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, \quad z > 0 \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, \quad z < 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Esta ecuación se integra fácilmente, con el resultado:

$$\begin{aligned}V(z) &= -\frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} + c_1, \quad z > 0 \\ &= \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} + c_2, \quad z < 0\end{aligned}\tag{1.7}$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  deben ser tales que

- i El potencial  $V(z)$  sea continuo en  $z = 0$ , es decir:  $c_1 = c_2$ .
- ii  $V(z = 0) = 0$ , por elección de nivel de referencia, luego  $c_1 = c_2 = 0$ .

Notar que no podemos tomar  $V(\infty) = 0$ ; esto se debe a que -como veremos- la carga total de esta distribución es infinita: La distribución no es acotada.

### 1.9.6 Alambre de largo $2L$

Determinemos el potencial producido por una línea de carga de largo  $2L$ , con carga  $\lambda$  por unidad de longitud. Tomando como eje  $z$  al que coincide con el alambre, y el origen en el centro de éste, tenemos

$$V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{1/2}}$$

Para realizar este cálculo, haremos un cambio simple, poniendo  $u = z' - z$ , entonces

$$V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(L+z)}^{(L-z)} \frac{du}{(x^2 + y^2 + u^2)^{1/2}}.$$

Para proseguir, llamemos  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y hagamos el cambio de variable

$$u = r \tan(\alpha),$$

en que los límites de integración son ahora  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , en que

$$\tan(\alpha_1) = - (L + z)/r \tag{1.8}$$

$$\tan(\alpha_2) = (L - z)/r \tag{1.9}$$

Entonces tenemos

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos(\alpha)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln [\sec(\alpha) + \tan(\alpha)] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Para obtener una expresión final, conviene obtener expresiones para las funciones trigonométricas de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , estas son:

$$\tan(\alpha_1) = - (L + z)/r \quad (1.10)$$

$$\sec(\alpha_1) = \sqrt{r^2 + (L + z)^2}/r \quad (1.11)$$

$$\tan(\alpha_2) = (L - z)/r \quad (1.12)$$

$$\sec(\alpha_2) = \sqrt{r^2 + (L - z)^2}/r \quad (1.13)$$

El potencial es entonces

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2 + (L - z)^2} + L - z}{\sqrt{r^2 + (L + z)^2} - (L + z)} \right].$$

Se propone como ejercicio el cálculo de esta integral. Verifique que, cuando  $L$  se hace muy grande, el campo eléctrico es precisamente el de una línea de largo infinito; además, a grandes distancias -para  $L$  finito- el campo es como el de una carga puntual -mas algunos términos correctivos-.

## 1.10 Ecuaciones de Poisson y Laplace

Hemos visto ya que un campo electrostatico satisface la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0,$$

donde  $\rho(\vec{r})$  es la distribución de carga en volúmen. Si utilizamos el potencial electrostatico en la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V(\vec{r}),$$

por lo tanto, se tiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0. \quad (1.1)$$

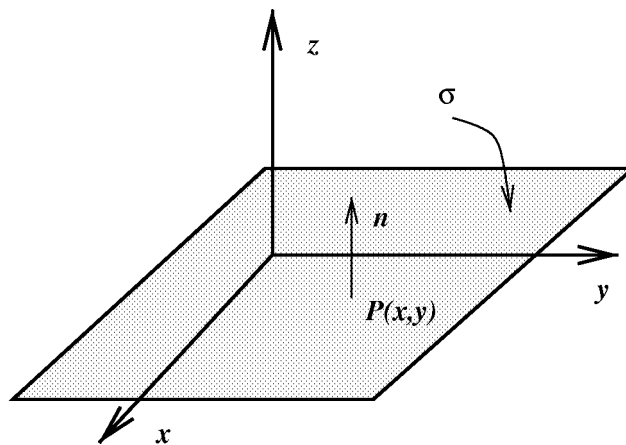
En las regiones en que no hay carga eléctrica, se satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (1.2)$$

Las anteriores son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; por lo tanto, para su resolución se requiere de condiciones de borde.

## 1.11 Condiciones de Borde

Para ver la necesidad de imponer condiciones de borde, así como entender en qué consisten, consideremos un problema trivial: un plano infinito, cargado con densidad de carga  $\sigma$ , por unidad de superficie.

Figura 1.8: Plano infinito, con carga  $\sigma$ , por unidad de area.

La simetría indica que las coordenadas más apropiadas para resolver este problema son las cartesianas; además, como  $\sigma$  es constante,  $V = V(z)$ , luego:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = V''(z) = 0 \quad \text{para } z \neq 0.$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} V(z) &= c_1 + c_2 z & , z < 0 \\ &= c'_1 + c'_2 z & , z > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Impongamos las siguientes condiciones:

- $V(z) = 0$  en  $z = 0$ .
- $V(z)$  es continuo en  $z = 0$ .

Estas dos condiciones implican que  $c_1 = c'_1 = 0$ ; además, la simetría indica que  $V(z) = V(-z)$ , lo cual da  $c'_2 = -c_2$  por lo tanto; finalmente:

$$V(z) = c_2 |z|.$$

Falta determinar  $c_2$ ; para hacer esto, usamos el teorema de Gauss, aplicandolo a una 'caja de pildoras'. Se obtiene  $2c_2 = \sigma/\epsilon_0$ . En el caso general, consideremos una region separada por una superficie, en la cual existe una densidad de carga superficial  $\sigma$ . Tomando una superficie gaussiana infinitesimal, en torno a un punto  $P$ , tenemos (ver figura):

$$\vec{E}(P_+) \cdot \hat{n} - \vec{E}(P_-) \cdot \hat{n} \triangleq \sigma(P)/\epsilon_0.$$

## 1.12 Casquete Esférico

Se tiene un casquete esférico de radio  $a$ , con densidad superficial de carga  $\sigma$  (uniforme). Determinaremos el potencial electrostático resolviendo la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) \quad \text{para } r \neq 0.$$

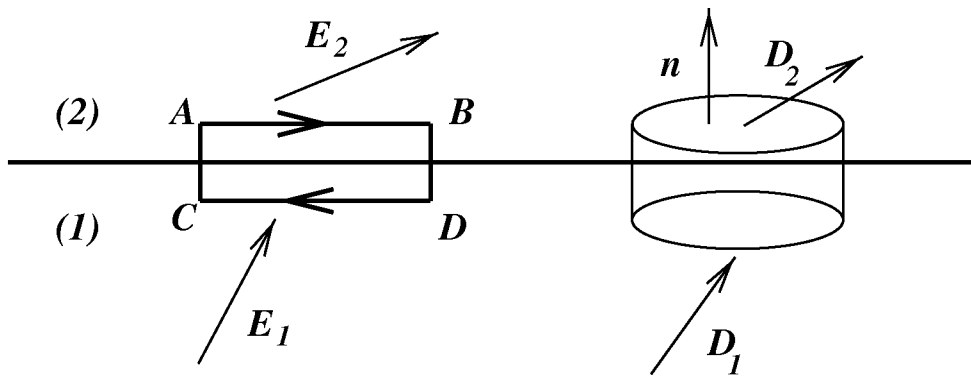


Figura 1.9: Geometría de las condiciones de borde. La componente de  $\vec{E}$  normal a la superficie es discontinua, si hay carga en la superficie.

Integrando, se tiene

$$V(r) = \begin{cases} -c_1/r + c_2 & r < a \\ -c'_1/r + c'_2 & r > a \end{cases}$$

Tomamos en cuenta las condiciones de borde

- No hay carga en el interior,  $c_1 = 0$ .
- $V(\infty) = 0$ , lo que implica  $c'_2 = 0$ .

Resumiendo:

$$V(r) = \begin{cases} c_2 & r < a \\ -c'_1/r & r > a \end{cases}$$

No hemos agotado las condiciones de borde,

- La continuidad en  $r = a$ , nos da  $c'_1 = -ac_2$ .
- La condición de borde de la componente normal del campo eléctrico nos dice que:

$$E(a+) = c_2/a, \quad E(a-) = 0,$$

lo cual implica  $c_2/a = \sigma/\epsilon_0$ , lo cual determina totalmente el problema.

# Capítulo 2

## Conductores

Un medio conductor es un material en el que los portadores de carga poseen libertad de moverse en su interior, en respuesta a campos eléctricos. Un conductor perfecto o ideal es un conductor en que los portadores de carga se moverán en respuesta a cualquier campo eléctrico, por pequeño que éste sea (gran movilidad).

Nos interesa, por ahora, estudiar el comportamiento de los medios conductores en presencia de campos eléctricos estáticos. El primer resultado de importancia es que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero.

En efecto, supongamos que producimos una inhomogeneidad en la distribución de carga en el interior de un conductor. Inicialmente, las cargas en el interior se moverán en respuesta al campo eléctrico presente y lo seguirán haciendo mientras  $\vec{E}$  sea distinto de cero, por lo tanto, el equilibrio se alcanzará sólo cuando  $\vec{E} = 0$  en el interior del conductor. Cuando se alcance tal situación de equilibrio, necesariamente, no habrá carga neta en el interior del conductor; por lo tanto si hay una carga neta en el conductor, ésta residirá en su superficie.

### 2.1 El Campo Eléctrico y los Conductores

Como hemos discutid, en un conductor en equilibrio se cumple

- i)  $\vec{E} = 0$  en su interior.
- ii) Las cargas libres residen en la superficie del conductor, con densidad superficial  $\sigma$  (no necesariamente uniforme).
- iii) Como  $\vec{E} = 0$  en el interior,  $V = cte$  en el interior del conductor. Se dice que *Un conductor es una región equipotencial del espacio y su superficie es una superficie equipotencial.*

Consideremos un conductor de forma arbitraria, y una carga puntual de magnitud  $q$ , en su vecindad. En equilibrio,  $\vec{E} = 0$  en su interior, pero como  $\vec{E} \neq 0$  fuera del conductor, las cargas se reordenarán produciendo una distribución de carga  $\sigma$  (la carga total sigue siendo cero).

- i El campo en la vecindad de un conductor es perpendicular a su superficie.

Si esto no fuera cierto, las cargas superficiales no estarían en equilibrio, ya que estarían sometidas a fuerzas tangenciales.

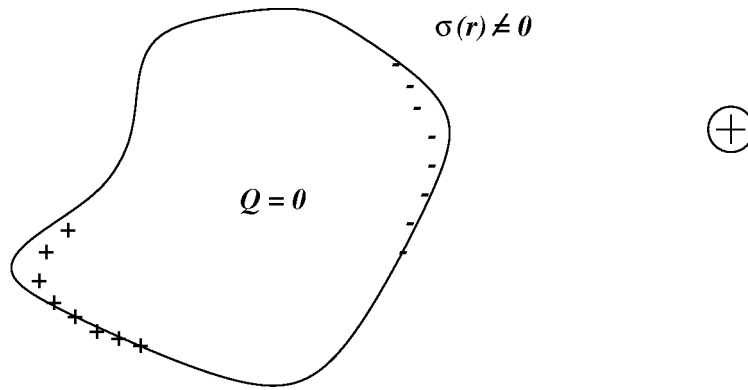


Figura 2.1: Una carga puntual frente a un conductor de forma arbitraria.

- ii El campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor tiene el valor  $\sigma/\epsilon_0$ .

Esta afirmación se puede demostrar usando el Teorema de Gauss, que establece que

$$E_n(+)-E_n(-)=\sigma/\epsilon_0,$$

además  $E(-)=0$ , luego  $E_n(+)=\sigma/\epsilon_0$ .

- iii Como  $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ ,  $E_n(+)=\vec{E}\cdot\hat{n}=-\partial V/\partial n$  es la derivada en la dirección perpendicular a la superficie del conductor (la dirección de  $\hat{n}$ ). La condición anterior se puede considerar como una ‘condición de borde’ para la resolución de la ecuación de Laplace,  $\sigma/\epsilon_0=-\partial V/\partial n$ .

### 2.1.1 Carga puntual y Esfera

Una carga puntual en el centro de una cáscara esférica conductora hueca, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , que es puesta a potencial  $V_0$ . Estudiaremos el problema usando la ecuación de Laplace, en coordenadas esféricas, debido a la simetría del problema. Suponemos entonces que el potencial depende sólo de la variable radial,  $V=V(r)$ , entonces

$$\nabla^2 V(\vec{r})=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dV}{dr})=0.$$

La ecuación anterior tiene una solución de la forma

$$V(r)=\frac{c}{r}+d,$$

en que  $c$  y  $d$  son constantes, que se determinan de las condiciones de borde del problema. El potencial se puede escribir en la forma:

$$V(r)=\begin{cases} c_1/r+d_1 & 0 < r < a \\ c_2/r+d_2 & a < r < b \\ c_3/r+d_3 & b < r \end{cases}$$

Las condiciones de borde son

- $\vec{E}=0$  en el interior de conductor,  $c_2=0$ .

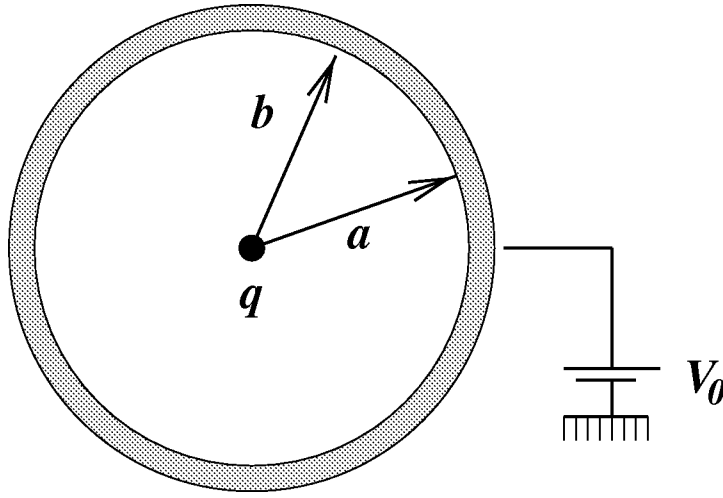


Figura 2.2: Una carga puntual dentro de una esfera conductora hueca

- $V(r) = 0$  para  $r \rightarrow \infty$ ,  $b_3 = 0$ .
- $V(r)$  es continuo en  $r = a$  y  $r = b$ , nos da las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1/a + b_1 &= b_2 \\ c_3/b &= b_2 \end{aligned}$$

- Hay una carga puntual en  $r = 0$ , luego  $c_1 = q/(4\pi\epsilon_0)$ .

Reemplazando todo tenemos, finalmente:

$$V(r) = \begin{cases} q/4\pi\epsilon_0 r + d_1 & 0 < r < a \\ d_2 & a < r < b \\ c_3/r & b < r \end{cases}$$

Imponiendo la (última) condición,  $V(r = b) = V_0$  nos da  $d_2 = V_0$ , entonces

$$V(r) = \begin{cases} q/(4\pi\epsilon_0)(1/r - 1/a) + V_0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r < b \\ V_0/r & b < r \end{cases}$$

Ahora podemos determinar las cargas inducidas en las superficies  $r = a$ , y  $r = b$ .

- En  $r = b$ ,

$$\sigma(b) = \epsilon_0 V_0 / b^2$$

- En  $r = a$

$$\sigma(a) = -q/4\pi a^2$$

## 2.2 Teorema de Unicidad

En muchos casos, uno requiere la solución de la ecuación de Poisson en regiones en que no hay carga eléctrica; en éste caso, la ecuación que se obtiene es la llamada ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V(r) = 0.$$

Observamos que esta ecuación es lineal, ya que si  $V_1(r)$  y  $V_2(r)$  son ambas soluciones, entonces cualquier combinación lineal de ellas es también una solución posible (principio de superposición). El teorema de Unicidad establece que dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen la mismas condiciones de borde, difieren, a lo sumo, en una constante aditiva.

## 2.3 Método de Imágenes

Es un método que se usa para resolver la ecuación de Laplace en algunos casos de alta simetría. La idea del método se explica más fácilmente resolviendo un ejemplo.

Consideremos el problema de un plano conductor infinito, mantenido a potencial cero (a tierra); frente a una carga puntual de magnitud  $q$ .

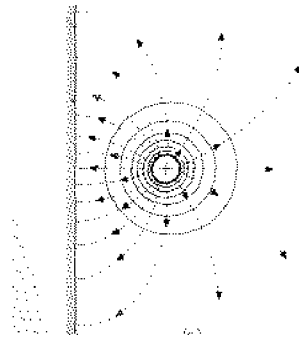


Figura 2.3: Plano infinito, a tierra, con una carga puntual  $q$  al frente.

El problema es determinar el campo eléctrico, en la región  $z > 0$  (fuera del conductor). La región  $z < 0$  (dentro del conductor) no es interesante, puesto que el campo eléctrico se anula allí. Las condiciones de borde del problema son:

- El potencial se anula en el plano conductor,  $V(x, y, z = 0) = 0$ .
- El campo eléctrico cerca del plano un conductor,  $\vec{E}(x, y, z = 0+)$  es perpendicular al plano conductor.
- El potencial se anula en el infinito,  $V = 0$  para  $z \rightarrow \infty$ .

Observamos que el campo de una carga puntual, por sí sólo, no satisface las condiciones del problema, es decir, el campo debe ser modificado por la presencia del conductor. En este problema, el campo eléctrico, en éste problema, puede imaginarse como la superposición de

- i) el campo eléctrico de la carga puntual ,

- ii) el campo eléctrico producido por las cargas inducidas sobre la superficie del conductor,  $\sigma(\vec{r})$ .

Obviamente, si se conociera la forma en que la carga inducida se distribuye, el problema estaría resuelto. En este caso la dificultad estriba precisamente en que tal distribución se conocerá sólo cuando se haya resuelto el problema completo. El método de las imágenes intenta determinar una distribución de cargas que produzcan el campo deseado en la zona de interés.

Consideremos ahora el problema siguiente, aparentemente no relacionado con el problema anterior: dos cargas puntuales, de igual magnitud y signo opuesto, localizadas a una distancia  $2h$  entre sí. El potencial electrostatico  $V(\vec{r})$  de éste sistema está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{1/2}} - \frac{q}{(x^2 + y^2 + (z + h)^2)^{1/2}} \right)$$

y satisface :

- $V(\vec{r}) = 0$  en  $z = \infty$
- $V(\vec{r}) = 0$  en el plano que pasa por el punto medio de la recta que une las dos cargas; en otras palabras, tal plano ( $z = 0$ ) es una equipotencial.

Además, el campo eléctrico producido por las cargas es

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z - h)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z + h)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z + h)^2)^{3/2}} \right]$$

luego, en  $z = 0$  tenemos

$$\vec{E}(x, y, z = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-2h\hat{k}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right],$$

que es perpendicular al plano  $z = 0$ . Notemos que, en la región  $z \geq 0$ , el potencial de las dos cargas satisface las mismas condiciones que debe satisfacer  $V(\vec{r})$  para el problema del plano y la carga; por lo tanto, el teorema de Unicidad nos dice que, en la region de interés, ambos potenciales coinciden.

El problema original puede ser resuelto ahora, introduciendo una distribucion de cargas ficticias (una sola carga, en este caso), que llamaremos 'cargas imagen', y que resuelven el problema. La dificultad principal, que limita la aplicabilidad del metodo, está en encontrar tales cargas imagen.

Ahora podemos determinar la carga inducida en el conductor plano

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

La carga inducida es  $q_{inducida} = -q$ , como lo muestra la integración directa, y como debía ser (intuitivamente). Se puede demostrar fácilmente que la fuerza con que la carga es atraída por el plano conductor está dada por

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} \hat{k}.$$

Otros problemas que pueden resolverse fácilmente usando el método de las imágenes son algunos con simetría esférica y cilíndrica, como los que se indican a continuación:

- i) esfera a tierra frente a una carga puntual.
- ii) esfera a potencial  $V_0$ , frente a una carga puntual.
- iii) etcetera (invente alguno).

## 2.4 Capacidad

Consideremos un sistema de dos conductores aislados. Supongamos primero que  $q_1 = q_{10}$  y  $q_2 = 0$ . Llamemos  $V_1(r)$  a la solución de este problema. El potencial en el conductor '1' será  $V_1(1)$ , mientras que el del conductor '2' será  $V_1(2)$ .

Si la carga de conductor '1' se multiplica por una constante  $\lambda$ , manteniendo  $q_2 = 0$ , vemos que la solución de este problema está dada por  $\lambda V_1(r)$ . Los conductores estarán ahora a los potenciales  $\lambda V_1(1)$  y  $\lambda V_1(2)$ , por lo tanto podemos decir que los potenciales son proporcionales a las cargas. Si  $q_2 = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} V_1(1) &= p_{11}q_1 \\ V_1(2) &= p_{21}q_1. \end{aligned}$$

Similarmente, si consideramos ahora el problema electrostático en que  $q_1 = 0$  y  $q_2 = q_{20}$ , y hacemos el mismo análisis anterior, vemos que

$$\begin{aligned} V_2(1) &= p_{12}q_2 \\ V_2(2) &= p_{22}q_2. \end{aligned}$$

Si ahora nos planteamos el problema más general en que las cargas son  $q_1$  en el conductor #1, y  $q_2$  en el conductor #2, éste tendrá la solución

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r),$$

donde  $V_1(r)$  es la solución del problema #1, y  $V_2(r)$  es la solución del problema #2. Por lo tanto el potencial en el conductor #1 será:

$$V(1) = V_1(1) + V_2(1) = p_{11}q_1 + p_{12}q_2,$$

mientras que en el conductor #2 será:

$$V(2) = V_1(2) + V_2(2) = p_{21}q_1 + p_{22}q_2.$$

Resumiendo, tenemos la relación lineal (que puede generalizarse fácilmente) :

$$\begin{aligned} V(1) &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 \\ V(2) &= p_{21}q_1 + p_{22}q_2 \end{aligned}$$

Los  $p$ 's se llaman coeficientes de potencial. Puede demostrarse que los coeficientes son simétricos ( $p_{21} = p_{12}$ ). Hay un caso particular de la relación anterior, que presenta gran interés práctico: el condensador. Se trata de un sistema formado por dos conductores, cargados con cargas  $+q$  y  $-q$ , respectivamente.

Usando las relaciones entre cargas y potenciales se encuentra que la diferencia entre los potenciales de los conductores es

$$\Delta V = V(2) - V(1) = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})q;$$

en otras palabras, la 'carga'  $q$  en el condensador es proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores,  $q = C\Delta V$ , donde

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

es la capacidad del condensador.

### 2.4.1 Condensador Plano

Supongamos que se tienen dos placas conductoras planas, muy grandes que se encuentran cargadas con cargas totales  $+q$  y  $-q$ , separadas por una distancia  $d$  (la distancia  $d$  es mucho mas pequeña que las dimensiones de la placa). Las cargas positivas y negativas de las placas se atraen entre sí, quedando finalmente depositadas en las caras interiores de las placas con densidades uniformes  $\sigma$  y  $-\sigma$  (evidentemente, ésta es sólo una solución aproximada),

$$\sigma = q/A,$$

en que  $A$  es el area de las placas. Como resultado de esto, el campo será aproximadamente uniforme, con el valor

$$E = \sigma/\epsilon_0.$$

La diferencia de potencial entre las placas es :

$$\Delta V = \sigma/\epsilon_0 = (qd)/(\epsilon_0 A).$$

Por lo tanto, la capacidad del condensador plano es

$$c = \epsilon_0 A/d.$$

La unidad MKSA de medición de la capacidad es el 'farad' (abreviado  $f$ ). Desde el punto de vista practico, 1  $f$  es una unidad bastante grande; por ejemplo, uno encuentra que los condensadores comerciales tienen capacidades del orden de los 'micro-farad' ( $\mu f = 10^{-6} f$ ).

Nota : la solución exacta del condensador plano es un problema matemáticamente difícil, debido a los 'efectos de borde'.

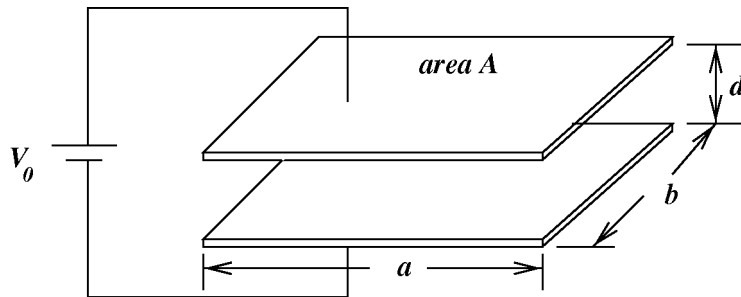


Figura 2.4: Condensador plano, de lados  $a$ ,  $b$ , área  $A = ab$  y separación  $d$ .

### 2.4.2 Condensador Esférico

Está formado por dos esferas concéntricas (radios  $a$  y  $b$ )

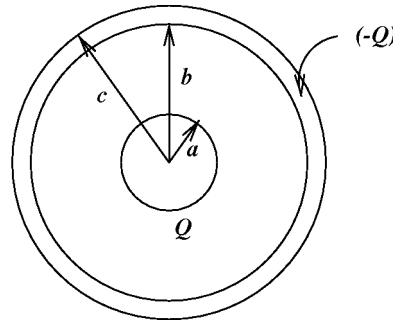


Figura 2.5: Condensador esférico, formado por dos conductores concéntricos, de radios  $a$  y  $b$ ,  $a \ll b$ .

Dada la simetría del problema, las cargas se distribuyen uniformemente con densidades que se pueden determinar fácilmente usando, por ejemplo el teorema de Gauss. El resultado es

$$\sigma(a) = - Q/(4\pi\epsilon_0 a^2) \quad (2.1)$$

$$\sigma(b) = Q/(4\pi\epsilon_0 b^2) \quad (2.2)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 ab/(b - a). \quad (2.3)$$

### 2.4.3 Conexión de Condensadores

Las maneras de conectar condensadores son muchas. Dos de ellas tienen importancia especial (por su simplicidad), y se representan en la figura.

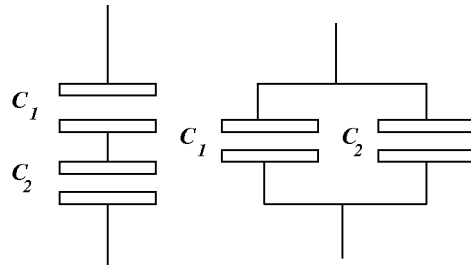


Figura 2.6: Condensadores conectados en serie y en paralelo.

- Conexión en Serie :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

- Conexión en Paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2.$$

### 2.4.4 Fuerza entre las placas de un Condensador

Notar que la fuerza no es  $q\vec{E}$  ( si  $\vec{E}$  = campo entre las placas), ya que tal campo incluye 'auto-fuerzas'. La fuerza correcta es, por lo tanto:

$$F = -\sigma^2 A / (2\epsilon_0).$$



# Capítulo 3

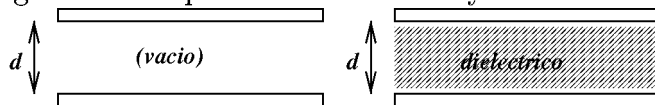
## Electrostática en medios Dieléctricos

Un material dieléctrico ideal no tiene cargas libres en su interior. Las cargas en un material dieléctrico -aislador- se encuentran ligadas, y no pueden moverse como lo hacen en los conductores. Deseamos estudiar la respuesta de los medios aislantes a la acción de campos eléctricos.

### 3.1 Experimento de Faraday

Supongamos que se tiene dos condensadores, -geométricamente idénticos-, uno con vacío entre las placas y otro con un dieléctrico entre ellas.

Figura 3.1: Experimento de Faraday en dieléctricos



Conocemos la capacidad del condensador #1- $C_0$ - (con vacío). Se mide la capacidad del condensador #2- $C$ - y se comparan; el resultado es

$$\frac{C}{C_0} = \kappa,$$

en que  $\kappa > 1$  es una constante. Se encuentra, además, lo siguiente,

- i)  $\kappa$  es independiente de la geometría; es decir, no depende de la forma del condensador.
- ii)  $\kappa$  depende sólo del material.
- iii)  $\kappa > 1$ .

Como  $Q = C\Delta V$ , entonces, para la misma diferencia de potencial  $\Delta V$ , la carga  $Q$  contenida en el condensador con dieléctrico es mayor que  $Q_0$ ,

$$Q/Q_0 = C/C_0 = \kappa > 1.$$

Por esta razón, el campo eléctrico entre las placas debe también ser modificado por la presencia del dieléctrico. En efecto, un cálculo sencillo muestra que:

$$E/E_0 = 1/\kappa < 1,$$

por lo tanto podemos escribir

$$E = \sigma/(\epsilon_0 \kappa).$$

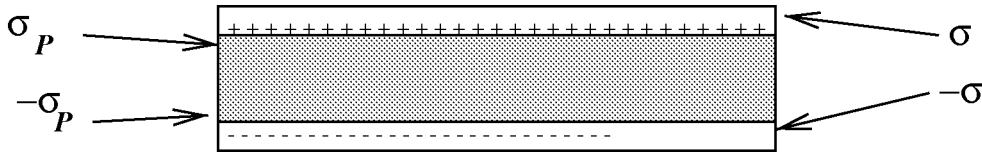
El campo neto  $E$  entre las placas es menor que cuando no hay dieléctrico. Como los campos se superponen linealmente, podemos escribir (simbólicamente)

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_{conductor} + E_{dieléctrico} \\ E &= \sigma/\epsilon_0 + (1/\kappa - 1)\sigma/\epsilon_0. \end{aligned}$$

Este resultado permite decir que ha aparecido una carga superficial, localizada en el dieléctrico, la cual produce un 'campo de polarización', de valor

$$E_p = \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Figura 3.2: Cargas libres y de polarización en un dieléctrico.



Como puede entenderse este hecho?. Podemos imaginar que un dieléctrico está formado por cargas que, si bien no son capaces de desplazarse libremente, pueden desplazarse de sus posiciones de equilibrio, en respuesta a los campos eléctricos que actúan sobre ellas. Estos desplazamientos dan lugar a momentos dipolares eléctricos, que a su vez producen un campo eléctrico adicional al campo 'externamente' aplicado. La aparición de los momentos dipolares microscópicos da lugar a una polarización macroscópica, cuyo significado se ilustra en la figura.

En base a este modelo sencillo puede construirse una teoría macroscópica del fenómeno; sin embargo, nosotros sólo haremos un bosquejo de ella, enfatizando su significado físico, y no el aspecto formal.

Definamos el vector 'polarización'  $\vec{P}$ , en un punto  $\vec{r}$ , como el 'límite físico' - ya explicado previamente- de la cantidad:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}(\vec{r})}{\Delta\Omega}, \quad (3.1)$$

en que  $\Delta\vec{p}(\vec{r})$  es el momento dipolar eléctrico de un trozo de material con volumen  $\Delta\Omega$ .

- i) Una polarización  $\vec{P}(\vec{r})$  produce un campo eléctrico  $\vec{E}_p(\vec{r})$ , que se puede calcular como sigue:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V_p(\vec{r}),$$

en que

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.2)$$

- ii) La polarización  $\vec{P}(\vec{r})$  surge como respuesta a campos eléctricos debidos a distribuciones de carga, luego el campo eléctrico total es :

$$\vec{E} = \vec{E}_{cargas} + \vec{E}_p.$$

- iii) Se puede demostrar que el campo  $\vec{E}_p$  se puede calcular a partir de ciertas 'cargas de polarización',  $\sigma_p$  y  $\rho_p$ , en la manera 'standard', es decir

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p(\vec{r}')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_p(\vec{r}')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.3)$$

donde las integrales son, respectivamente sobre el volumen y la superficie del dieléctrico; además,

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad (3.4)$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \quad (3.5)$$

Observemos que, si la polarización  $\vec{P}(\vec{r})$  fuera una función conocida de  $\vec{r}$ , entonces la expresión anterior permitiría calcular el campo eléctrico en todas partes. En general,  $\vec{P}(\vec{r})$  se origina como respuesta al campo eléctrico **total**, el cual incluye el campo producido por la propia polarización  $\vec{P}$ , y es desconocido. Se ha encontrado, en forma experimental, que existen relaciones de la forma:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}).$$

Este tipo de relaciones se denominan, genéricamente, relaciones 'constitutivas'. En general, muchos medios materiales satisfacen una relación de la forma :

$$\vec{P} = \chi \vec{E},$$

en que  $\chi$  es una constante. Volveremos a este punto luego.

## 3.2 Teorema de Gauss

Consideremos un conjunto de cargas, rodeadas por un medio material dieléctrico, infinito. El campo eléctrico se debe a todas las cargas del sistema, por lo tanto es válido el teorema de Gauss, en la forma

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{total}/\epsilon_0,$$

donde la carga total,  $Q_{total}$  es la carga real más la carga de polarización

$$Q_{total} = Q + Q_p.$$

Para simplificar, tomar un conductor con carga  $Q$ , de superficie  $S_c$ , y una superficie  $S$ , que contiene a  $S_c$ . La carga de polarización es

$$Q_p = - \int \vec{P} \cdot \hat{n} dS,$$

luego, se puede escribir

$$\int (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q$$

Se define el ‘vector desplazamiento’  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , entonces

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (3.6)$$

en forma equivalente -diferencial-

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}), \quad (3.7)$$

### 3.3 Constante Dieléctrica

Hemos definido una constante  $\chi$ , llamada susceptibilidad dieléctrica, que relaciona la polarización  $\vec{P}$  con el campo eléctrico, para medios materiales lineales, isótropos y homogéneos (en adelante, LIH, para abreviar). La relación  $\vec{P} = \chi \vec{E}$ , se puede expresar como una relación entre los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , que tiene la forma

$$\vec{D} = (\epsilon_0 + \chi) \vec{E}.$$

Se acostumbra a definir la ‘constante dielectrica’,  $\epsilon$  como

$$\epsilon = \epsilon_0 + \chi.$$

De lo que hemos dicho, es fácil ver la relación que existe entre las diferentes constantes  $\chi$ ,  $\epsilon$  y  $\kappa$ .

$$\begin{aligned} \kappa &= \epsilon/\epsilon_0 \\ \chi &= \epsilon - \epsilon_0 \\ \chi &= (\kappa - 1)\epsilon_0 \end{aligned}$$

Para referencia futura, incluyamos algunas definiciones

- **Medio Lineal:** Es un material en que la relación entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$  es una función lineal. Esto quiere decir que dicha relación se puede expresar en la forma

$$P_i = \chi_{i1} E_1 + \chi_{i2} E_2 + \chi_{i3} E_3.$$

En otras palabras, los elementos  $\chi_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) forman una matriz simétrica.

| Material | $\kappa$ | $E_{max}$<br>Volt/m        |
|----------|----------|----------------------------|
| Vacio    | 1.00     | —                          |
| Aire     | 1.0006   | $3.0 \cdot 10^6$ (1 atm. ) |
| Aire     | 1.054    | (100 atm. )                |
| $CO_2$   | 1.001    | (1 atm. )                  |
| $H_2O$   | 88       | (20 C, destilada)          |
| Petroleo | 2.1      | $12.0 \cdot 10^6$          |

Tabla 3.1: Valores de la constante dieléctrica  $\kappa$ , y el campo de ruptura, para algunos materiales dieléctricos.

- **Medio Isótropo:** Es un material cuyas propiedades dieléctricas no dependen de la orientación del material. En el caso de los medios que son además lineales, esto significa que la relación se expresa como ( $i = 1, 2, 3$ )

$$P_i = \chi E_i.$$

- **Medio Homogéneo:** Es un material cuyas propiedades dieléctricas son las mismas en todo punto del material. Si el medio es lineal, la (o las)  $\chi$  son constantes, independientes de la posición en el material.

## 3.4 Campo de Ruptura

La relación  $\vec{P} = \chi \vec{E}$  puede ser considerada como una relación análoga a la ley de Hooke (analogía mecánica). En general, un medio dieléctrico sometido a un campo eléctrico muy intenso 'se rompe' - es decir, se vuelve conductor-, si el campo en el interior del material supera un valor crítico mínimo. Este campo es el llamado 'campo de ruptura'.

## 3.5 Condiciones de Borde en Dieléctricos

Con referencia a la figura anterior, se puede demostrar que las condiciones de borde en la interfase entre dos medios dieléctricos, se pueden escribir en la forma

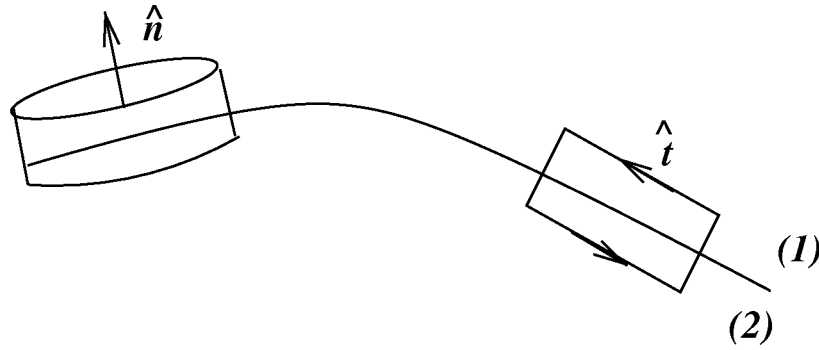
$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} - \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \sigma \quad (3.8)$$

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t} - \vec{E}_2 \cdot \hat{t} = 0 \quad (3.9)$$

### 3.5.1 Carga puntual en dieléctrico

Una carga puntual en un dieléctrico (isótropo, lineal, homogéneo). Determinemos los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{P}$ . Usando la ley de Gauss, con una superficie esférica  $S_r$  de radio  $r$ , concéntrica con la carga  $q$ , se tiene

Figura 3.3: Interfase entre dos dieléctricos ( '1' y '2' ).



$$\oint_{S_r} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = q.$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} D(r) &= q/4\pi r^2 \\ E(r) &= q/4\pi\epsilon r^2 \\ P(r) &= (\epsilon - \epsilon_0)q/4\pi\epsilon r^2. \end{aligned}$$

### 3.5.2 Esfera conductora en dieléctrico

Consideramos una esfera conductora, con carga  $Q$ , rodeada por un dieléctrico lineal, isótropo, homogéneo, de permitividad  $\epsilon$  y extensión infinita. Calculemos los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  y las densidades de carga real y de polarización.

Este problema se resuelve usando el mismo método que el anterior, pues presenta la misma simetría. Por este motivo, para  $r > R$  los campos son los mismos que en el problema anterior (con  $Q$  en vez de  $q$ ). Falta entonces calcular las densidades de carga superficial, las que se obtienen de

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = \sigma,$$

en que  $\vec{D}$  es el vector desplazamiento en la vecindad de la superficie del conductor, y  $\hat{n}$  es el vector normal a la superficie de la esfera conductora  $r = R$ , que apunta hacia fuera del conductor. Con esto,

$$\sigma = Q/4\pi R^2.$$

De la misma manera, la densidad de carga de polarización superficial es

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n},$$

en que  $\hat{n}$  apunta hacia afuera del dieléctrico, opuesta a la normal al conductor.

$$\sigma_P = -(\epsilon - \epsilon_0)Q/4\pi\epsilon R^2.$$

Se observa que  $\sigma_P$  es de signo opuesto a  $\sigma$ , pues las cargas negativas del dieléctrico se deben aproximar a las cargas positivas del conductor.

### 3.5.3 Carga puntual en interfase

Una carga puntual en la interfase plana entre dos medios dieléctricos (LHI) homogéneos, semi-infinitos en extensión. Podemos partir observando que el sistema debiera presentar al menos alguna forma de simetría esférica, incompleta desde luego. Escojamos las coordenadas de manera que los dos semiespacios están separados por el plano  $z = 0$ , y que la carga puntual  $q$  se encuentra dicho plano, y su posición coincide con el origen de coordenadas.

Las condiciones de borde que se deben satisfacer, en el plano  $z = 0$ , son

i) continuidad de la componente normal del vector  $\vec{D}$ , que se expresa como

$$\vec{D}(x, y, z = 0^-) = \vec{D}(x, y, z = 0^+).$$

ii) continuidad de las componentes tangenciales de  $\vec{E}$ ,

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z = 0^-) &= E_x(x, y, z = 0^+) \\ E_y(x, y, z = 0^-) &= E_y(x, y, z = 0^+). \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que el campo eléctrico  $\vec{E}$  tiene simetría esférica, pues es la única manera de asegurar la satisfacción de las condiciones anteriores, por lo tanto, debe tener la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

La constante  $k$  debe determinarse usando el teorema de Gauss; para lo cual escribimos

$$\begin{aligned} \vec{D}(x, y, z < 0) &= \epsilon_1 \vec{E}(x, y, z < 0) \\ \vec{D}(x, y, z > 0) &= \epsilon_2 \vec{E}(x, y, z > 0). \end{aligned}$$

Calculamos el flujo de este campo, obteniendo

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)k = q,$$

donde

$$k = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

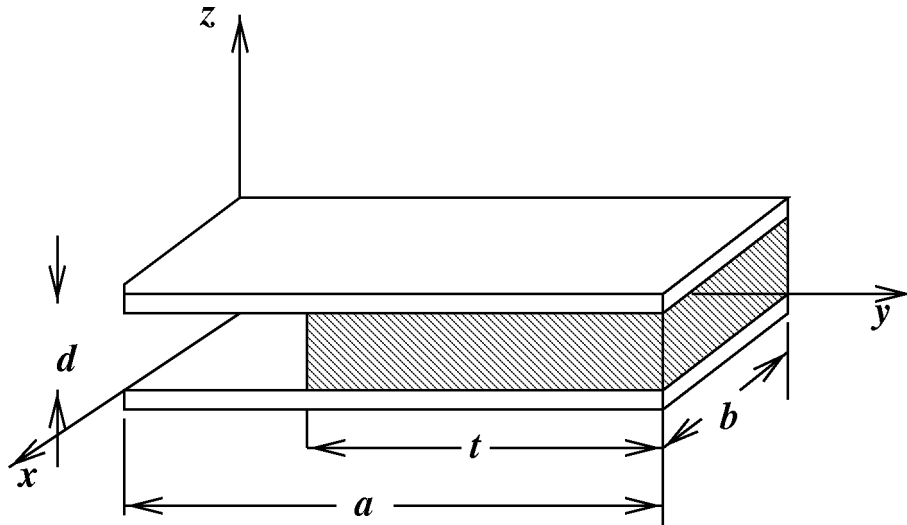


Figura 3.4: Condensador plano, con una placa dieléctrica entre las placas conductoras.

### 3.5.4 Condensador con placa dieléctrica

Consideremos el problema de una placa dieléctrica entre las placas de un condensador plano, y determinemos los campos y la fuerza entre las placas. La geometría es como sigue: placas de lados  $a$ ,  $b$ , con separación  $d$ ; además, se inserta una placa de material dieléctrico, de espesor  $d$  y ancho  $b$ , que ingresa una distancia  $t$  entre las placas, como se observa en la figura.

Hacemos la suposición que las placas son grandes, en comparación con la separación, lo que nos hace suponer que tanto  $a$ , como  $b$  y  $t$  son mucho mayores que  $d$ . Esto nos permite despreciar los efectos de los bordes de las placas, y suponer que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  son perpendiculares a la superficie de las placas, paralelos a la dirección  $\hat{k}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E\hat{k} \\ \vec{D} &= D\hat{k}.\end{aligned}$$

Estos campos son los que existen en el espacio entre las placas conductoras. Los campos en el resto del espacio son nulos, incluyendo desde luego el interior de los conductores. Como los campos deben satisfacer las ecuaciones de la electrostática, la ecuación

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

esto indica que  $E$  depende sólo de  $z$ , además

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial D}{\partial z} = 0.$$

Notamos que hay dos regiones, que llamaremos (I) y (II), respectivamente. En la región (I) se tiene  $0 < x < b$ ,  $0 < y < a - t$ ,  $0 < z < d$ ; mientras que en la región (II) se tiene  $0 < x < b$ ,  $a - t < y < a$ , y  $0 < z < d$ . Sabemos entonces que el campo  $\vec{E}$  es el mismo tanto en la zona I como en la zona II, mientras que

$$\begin{aligned} D_I &= \epsilon_0 E \quad \text{en la zona I} \\ D_{II} &= \epsilon E \quad \text{en la zona II.} \end{aligned}$$

Si la placa superior de la figura está a un potencial  $V_0$ , respecto a la placa superior, entonces  $E = -V_0/d$ , pues de esta manera el campo queda dirigido de la placa superior a la inferior. Podemos calcular las cargas en la placa superior, usando la relación

$$\sigma = \vec{D} \cdot \hat{n},$$

usando  $\hat{n} = -\hat{k}$ , que es el vector normal a la superficie de dicha placa. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -D_I = \epsilon_0 V_0/d \\ \sigma_{II} &= -D_{II} = \epsilon V_0/d \end{aligned}$$

Obtengamos la capacidad  $C$  de este condensador, para lo cual debemos obtener primero la carga en las placas. Llamemos  $A_I = b(a-t)$  y  $A_{II} = bt$ , con esto podemos expresar la carga en la placa superior como

$$Q = \sigma_I A_I + \sigma_{II} A_{II} = (\epsilon_0(a-t) + \epsilon t)b \frac{V_0}{d},$$

por lo tanto la capacidad es

$$C = \frac{\epsilon_0 A_I}{d} + \frac{\epsilon_0 A_{II}}{d} = \frac{(\epsilon_0(a-t) + \epsilon t)b}{d}.$$

Basados en esta relación, podemos decir que la capacidad obtenida es equivalente a la combinación en paralelo de dos condensadores, de capacidades  $C_I = \epsilon_0 A_I/d$  y  $C_{II} = \epsilon A_{II}/d$ .

Podemos obtener ahora el vector polarización  $\vec{P}$ , y la densidad de carga de polarización en la placa superior. Evidentemente, en la zona en que hay vacío (zona I) el vector polarización se anula, mientras que en la otra zona se tiene

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)V_0}{d}\hat{k} \\ \sigma_P &= \vec{P} \cdot \hat{k} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)V_0}{d} \end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Energía Electroestática

Para reunir un sistema de cargas en una configuración dada es necesario realizar trabajo. Por el teorema del trabajo y la energía, el trabajo realizado pasa a formar parte de la energía potencial del sistema, en este caso se trata de energía potencial electrostática.

### 4.1 Energía de un Sistema de Cargas

Para comenzar, supongamos que tenemos un sistema de  $n$  cargas puntuales,  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , inmersas en un medio dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo, de permitividad  $\epsilon$ . Determinemos el trabajo necesario para llevar a estas  $n$  cargas desde una configuración inicial en que se encuentran infinitamente separadas hasta la configuración final en que se encuentran ubicadas en posiciones  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ .

Traer la primera carga no cuesta ningún trabajo,

$$W_1 = 0.$$

Traer la segunda carga implica realizar trabajo contra el campo de la primera carga,

$$W_2 = (-) \int_{\infty}^{r_1} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}}.$$

Traer la tercera carga, cuando  $q_1$  y  $q_2$  ya están presentes requiere un trabajo  $W_3$ ,

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon r_{23}},$$

así, traer la carga  $(j+1)$  requiere un trabajo  $W_{(j+1)}$ , dado por

$$W_{(j+1)} = q_{(j+1)} \sum_{i=1}^{i=j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_{i,(j+1)}}.$$

Por lo tanto, traer las  $n$  cargas ha costado un trabajo total  $W$ ,

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + \dots + W_n \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} W_j, \end{aligned}$$

lo que puede escribirse como (notar el factor  $1/2$ ):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (4.1)$$

Ahora identificamos el trabajo realizado con la energía potencial electrostática del sistema,  $U = W$ . Observemos que esta relación se puede escribir en la forma

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j V_j,$$

donde  $V_j$  es el potencial en la posición de la carga  $q_j$ , debida al resto de las cargas,

$$V_j = \sum_{i=1}^{'n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_{ij}}.$$

Notar la ' sobre la  $\Sigma$ , que indica que el término con  $i = j$  debe omitirse de la suma.

## 4.2 Distribuciones continuas

Notemos que las fórmulas pueden generalizarse al caso de distribuciones continuas de carga,  $\rho(r)$ , para lo cual consideramos un volumen  $V$ , y lo dividimos en  $N$  elementos de volumen  $dV_i$ , con carga  $dQ_i = \rho_i dV_i$ . Usamos la expresión

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}},$$

que es aplicable al caso de un conjunto de cargas puntuales, y la aplicamos a nuestro caso, tomando luego el límite en que  $N \rightarrow \infty$ , entonces se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') d^3 r d^3 r'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|},$$

y también

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3 r.$$

Notemos que, en la última expresión,  $V(r)$  es el potencial electrostático total, debida a toda la distribución de cargas.

## 4.3 Sistema de Conductores

Como en cada conductor el potencial es constante, y la carga se distribuye en la superficie con densidad  $\sigma$ , se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) dS_i$$

Entonces, la energía de un sistema de  $n$  conductores se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i.$$

Notar que la energía de un sistema de conductores luce formalmente idéntica a la de un sistema de cargas puntuales. Sin embargo, hay que notar que la expresión para conductores incluye 'auto-energías', es decir, la energía necesaria para crear la configuración de cargas en los conductores. Veremos que la energía electrostática puede interpretarse como almacenada **en el espacio**, como alternativa a la interpretación que fluye de la ecuación anterior.

**Teorema:** La energía potencial electrostática puede escribirse como

$$U = \int \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) d^3r \quad (4.2)$$

### 4.3.1 Energía Electroestática de una Esfera

Se tiene una esfera de radio  $a$ , con densidad de carga  $\rho(\vec{r})$ , en el vacío. Se desea determinar su energía potencial electrostática. Esta energía puede ser calculada usando la expresión anterior -generalizada apropiadamente- o bien con el siguiente procedimiento:

Supongamos que la carga de la esfera se trae en cascarones de espesor  $dr$ , con carga  $dQ(r)$ . El trabajo necesario para traer el cascarón de espesor  $dr$ , ubicado en  $(r, r + dr)$  es :

$$dU = \frac{Q(r)dQ}{4\pi\epsilon r},$$

en que  $Q(r)$  es la carga que ya ha sido traída, está contenida entre los radios 0 y  $r$ , y está dada por

$$Q(r) = \int_0^r \rho(\vec{x}) d^3x = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x) dx.$$

De esta manera, la carga del cascarón,  $dQ(r)$  es

$$dQ(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Tomemos, para simplificar el calculo,  $\rho = \text{constante}$ , y llamemos  $Q_0$  a la carga total de la esfera. Se tiene

$$Q(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q_0,$$

por lo tanto,  $dU = Q_0^2 dr / (4\pi\epsilon R^3)$ , y finalmente

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon R}.$$

### 4.3.2 Condensador plano

Aplicamos la fórmula para conductores, y tenemos las siguientes expresiones alternativas:

$$\begin{aligned} U &= Q\Delta V/2 \\ &= C(\Delta V)^2/2 \\ &= Q^2/2C \end{aligned}$$

Usando la densidad de energía,  $u_e = \vec{E}^2/(2\epsilon_0)$ , con el campo  $E = \sigma/\epsilon_0$ , y  $\sigma = Q/A$ ,

$$u_e = \sigma^2/(2\epsilon_0),$$

lo cual da el resultado anterior,

$$U = \int u_e d^3r = \sigma^2 Ad/2\epsilon_0.$$

### 4.3.3 Esfera con carga superficial uniforme

Determinar la energía potencial electrostática de una esfera de radio  $R$ , con carga superficial  $\sigma$ , uniformemente distribuida sobre su superficie. El potencial electrostatico de esta distribución es

$$V(r) = \begin{cases} Q/4\pi\epsilon_0 r & \text{para } r > R \\ Q/4\pi\epsilon_0 R & \text{para } R > r, \end{cases}$$

donde  $Q = 4\pi R^2\sigma$ . El campo eléctrico es

$$E = \begin{cases} 0 & \text{para } r < R \\ Q/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{para } r > R \end{cases}$$

La densidad de energía electrostática es  $u_e$ ,

$$u_e = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, \text{ para } r > R$$

y se anula para  $r < R$ . Integrando, obtenemos  $U$ ,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Como se trata de una cáscara esférica, y ésta se encuentra a potencial constante, tenemos

$$U = QV(R)/2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

el mismo resultado anterior.

## 4.4 Cálculo de Fuerzas y Torques

Como veremos en esta sección, el conocimiento de la energía electrostática de un sistema nos permitirá obtener información acerca de las fuerzas y torques sobre sus partes.

### 4.4.1 Sistema aislado

Consideremos una sistema **aislado** y permitamos que una parte de este sistema se mueva bajo la acción de la fuerzas eléctricas. Sea  $dx$  el desplazamiento del sistema. El trabajo mecánico  $dW_{mec}$  realizado es

$$dW_{mec} = Fdx.$$

Como el sistema está aislado, el trabajo mecánico se realiza a costa de la energía eléctrica del sistema,

$$dU + dW_{mec} = 0$$

por lo tanto,

$$Fdx = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)|_{Q=cte.}dx.$$

La fuerza  $F$  queda dada entonces por

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}|_{Q=cte.} \quad (4.3)$$

El desplazamiento  $x$  puede ser lineal o angular; si es lineal,  $F$  es una fuerza, mientras que si es angular  $F$  es un torque.

#### 4.4.2 Sistema a potenciales constantes

Tenemos un sistema de conductores, los cuales se mantienen a **potenciales fijos**, por medio de fuentes de energía externas (baterías). Si dejamos que una de las partes se mueva tendremos:

$$dU + dW_{mec} = dW_b,$$

en que  $dW_b$  es el trabajo de las baterías, necesario para mantener  $V = cte.$  en los conductores. Por otra parte, para un sistema de conductores la energía se escribe

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i,$$

por lo tanto, a potenciales  $V_i$  constante,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i dQ_i.$$

Por otra parte,  $dW_b$  es el trabajo necesario para traer cargas  $dQ_i$  a los conductores, luego

$$dW_b = \sum_{i=1}^n V_i dQ_i = 2dU$$

luego (notar la diferencia de signo con el caso (a)),

$$dW_{mec} = +dU$$

Finalmente, la fuerza queda dada por

$$F = +\frac{\partial U}{\partial x}|_{V=cte} \quad (4.4)$$

### 4.4.3 Condensador plano

Fuerza entre las placas de un condensador plano. Se distinguen dos casos, aunque es claro que la fuerza es la misma en ambos.

i) Carga constante. La energía se puede expresar en función de la carga, como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{x}{2\epsilon A} Q^2,$$

en que  $A$  es el área de las placas del condensador,  $x$  la separación de las placas,  $\epsilon$  la constante dieléctrica, y  $C = \epsilon A/x$  la capacidad. Con esto, podemos evaluar fácilmente la fuerza,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}|_{Q=Cte.} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A}.$$

ii) Potencial constante. Podemos expresar la energía en función de la diferencia de potencial  $\Delta V$ , para poder hacer la derivada en forma sencilla,

$$U = \frac{C(\Delta V)^2}{2} = \frac{\epsilon A(\Delta V)^2}{2x},$$

entonces la derivada es fácil de realizar, y vale

$$F = +\frac{\partial U}{\partial x}|_{\Delta V=Cte.} = -\frac{\epsilon A(\Delta V)^2}{2x^2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A},$$

en que hemos supuesto que la carga del condensador es  $Q = C\Delta V$ .

### 4.4.4 Carga puntual y plano conductor

Una carga puntual  $q$ , a una distancia  $h$  frente a un plano conductor infinito, a potencial cero ('a tierra'). El campo eléctrico para esta configuración ya ha sido resuelto por medio del método de las imágenes, ahora queremos calcular la fuerza que el plano ejerce sobre la carga  $q$ . Para calcular esto podemos proceder de dos maneras.

En primer lugar, usando la idea de dicho método, la fuerza buscada debe corresponder a la fuerza entre la carga  $q$  y su imagen, que obtendremos a partir de la energía potencial de las dos cargas, separadas por la distancia  $r$ ,

$$U = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Con esto, la fuerza será

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Ahora, la distancia entre las cargas es  $r = 2h$ , por lo tanto

$$F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Naturalmente, una vez reconocido el hecho que la fuerza es aquella entre dos cargas puntuales, el resultado anterior es evidente.

Otra manera de verlo consiste en observar que la fuerza corresponde a la interacción entre la carga  $q$ , y la densidad de carga inducida  $\sigma(x, y)$ , obtenida previamente. Por lo tanto, basta integrar para calcular dicha fuerza.

### 4.4.5 Torque sobre un dipolo en campo externo

Determinemos la fuerza sobre un dipolo en un campo externo  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ . Supongamos que el dipolo está dispuesto en un punto de coordenadas  $\vec{r}$ , y lo visualizamos como una carga  $(-q)$  ubicada en  $\vec{r}$ , y una carga  $+q$ , localizada en  $\vec{r}+\vec{a}$ . Entonces, la energía del dipolo en este campo externo es

$$U = qV(\vec{r} + \vec{a}) - qV(\vec{r}) = q\vec{a} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}).$$

Supongamos que el campo  $\vec{E}$  puede considerarse como uniforme, entonces, llamando  $\alpha$  al ángulo que forma el momento dipolar  $\vec{p}$  con el campo eléctrico  $\vec{E}$ ,

$$U = -pE\cos(\alpha).$$

El torque es la derivada

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -pE\sin(\alpha).$$

Esto indica que el dipolo no experimenta torque para los ángulos  $\alpha = 0, \pi, 2\pi$ . Indudablemente, la configuración  $\alpha = 0$  es de equilibrio estable, mientras que la correspondiente a  $\alpha = \pi$  es inestable.



# Capítulo 5

## Corriente Eléctrica

Hemos visto con algún detalle los fenómenos eléctricos estáticos. Es natural preguntarse ahora por los efectos producidos por el movimiento de cargas eléctricas. En términos muy generales, el movimiento de cargas eléctricas constituye una corriente eléctrica. En mayor o menor grado, todos los materiales son capaces de 'conducir' una corriente eléctrica. Las características del fenómeno de conducción dependen del material considerado. Se puede clasificar los materiales de acuerdo a si conducen corriente eléctrica con facilidad o no (conductores y aisladores), o bien en forma más cuantitativa, como lo haremos más adelante. La siguiente tabla nos da algunos ejemplos de materiales conductores de diversos tipos.

### 5.1 Corriente Eléctrica

Una corriente eléctrica es, simplemente, el movimiento de cargas eléctricas. Definimos la corriente eléctrica  $I$ , como la carga eléctrica  $dQ$  que pasa a través de una sección de área  $A$  de conductor, por unidad de tiempo  $dt$ ,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

La corriente eléctrica  $I$  se mide entonces en coulomb por segundo (ampere) ( $1 A = 1 Cb/seg$ ). Notemos que, de acuerdo a nuestra definición, tanto los portadores de carga positiva como negativa contribuyen a la corriente en el mismo sentido (del mismo signo).

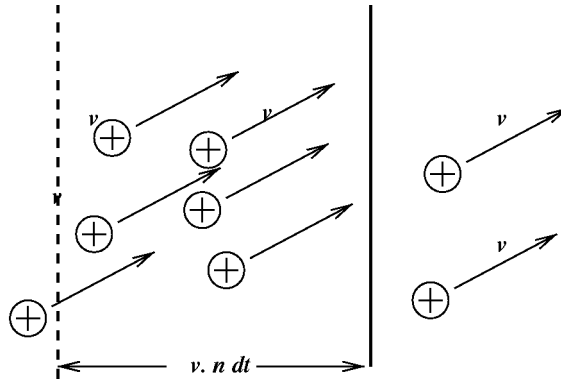
Tabla 5.1: Tipos de materiales, portadores de carga y ejemplos de materiales reales en los que se encuentran

| Tipo de Conductor  | Portador de carga   | Ejemplo                   |
|--------------------|---------------------|---------------------------|
| Conductor metálico | electrones          | <i>Cu, Au, Ag, Pt, Al</i> |
| Semi-conductor     | electrones y huecos | <i>Si, Ge, GaAs, etc.</i> |
| Superconductor     | par de Cooper       | <i>Pb, Hg, etc.</i>       |
| Gases ionizados    | iones               |                           |

## 5.2 Densidad de corriente

De la definicion anterior resulta claro que la corriente que pasa por una sección dada de conductor depende tanto del número de portadores de carga como de su velocidad. Consideremos un conjunto de cargas que se mueven todas con la misma velocidad  $v$  (tienen la misma carga  $q$ ). Supongamos que hay  $n$  cargas por unidad de volumen.

Figura 5.1: Definición de densidad de corriente.



En un intervalo de tiempo  $dt$ , las cargas se mueven una distancia  $vdt$ ; por lo tanto la cantidad de carga que pasa por el ara  $A$  es  $dQ$ ,

$$dQ = qn(vdtA),$$

por lo tanto, la corriente que pasa por el area  $A$  es

$$I = nqvA.$$

Se define entonces la densidad de corriente,  $\vec{J}$ , tal que

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

## 5.3 Conservación de la carga Eléctrica

La carga neta en cualquier region del espacio se conserva constante. Este principio fundamental se expresa matemáticamente en la ecuación de continuidad: Consideremos un elemento de volumen  $V$ , cualquiera, limitado por la superficie  $S$ ,

La corriente que sale del volúmen  $V$ , lo hace sólo a través de  $S$ ,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

por el principio de conservación, la corriente que sale del volumen  $V$ , se debe a un decrecimiento de la carga contenida en  $V$ ,  $I = -dQ/dt$ . Por otra parte,

$$Q = \int \rho(\vec{r})dV,$$

luego, como  $V$  es un volumen cualquiera, se tiene la ecuación de continuidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.2)$$

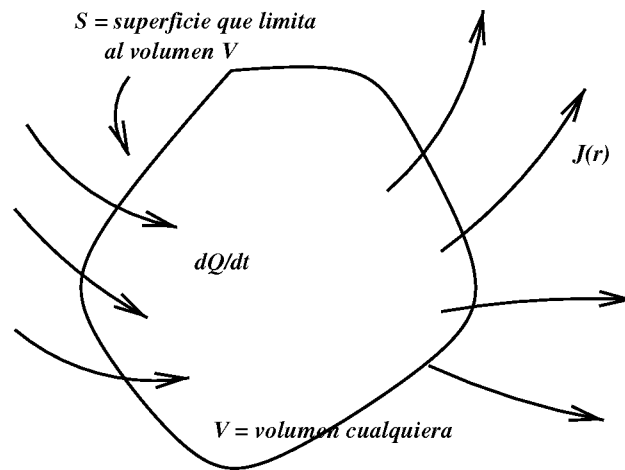


Figura 5.2: Balance de carga eléctrica en un volumen. El cambio de la carga en una región es debido a la corriente que sale a través de la superficie  $S$  que limita el volumen  $V$ .

Tabla 5.2: Valores de la resistividad y el parámetro de variación con la temperatura, para algunos materiales.

| Material | $\eta = 1/g$<br>( $\Omega/m$ ) | $\alpha$ (200C)<br>( $^{\circ}K^{-1}$ ) |
|----------|--------------------------------|-----------------------------------------|
| Al       | $2.8 \cdot 10^{-8}$            | 0.0039                                  |
| Cu       | $1.7 \cdot 10^{-8}$            | 0.0039                                  |
| Au       | $2.4 \cdot 10^{-8}$            | 0.0034                                  |
| Ge       | 0.45                           | -0.048                                  |
| Ge       | 0.01                           | $(5 \cdot 10^{-6} \%As)$                |

## 5.4 Ley de Ohm

Experimentalmente se ha encontrado que, para muchos conductores, a temperatura constante, la densidad de corriente en el material es proporcional al campo eléctrico,

$$\vec{J} = g \vec{E}. \quad (5.3)$$

La constante  $g$  se denomina conductividad, y es una propiedad del material. La siguiente tabla muestra algunos valores típicos de la resistividad  $\eta = 1/g$ .

Se encuentra, también experimentalmente, que la resistividad varía con la temperatura en la forma

$$\eta = \eta_0(1 + \alpha(T - T_0)).$$

La constante  $\alpha$  es el cambio fraccional de la resistividad con la temperatura

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT} \Big|_{T=T_0}.$$

Consideremos un medio conductor ‘ohmnico’ ( $\vec{J} = g\vec{E}$ ), con una permitividad dielectrica  $\epsilon$ . Tomando en cuenta la ley de Ohm en la ecuacion de continuidad, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (g\vec{E}) = g\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{g}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{g}{\epsilon} \rho.$$

Por lo tanto, se cumple la relacion

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon} \rho = 0,$$

cuya solución es, para un volumen  $V$  con carga inicial  $Q_0$ ,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

La constante  $\tau = g/\epsilon$  es del orden de  $10^{-15}$  seg para un conductor bueno. En otras palabras, el tiempo que demora el interior de un conductor en alcanzar su estado de equilibrio estatico es del orden de  $10^{-15}$  seg, virtualmente instantáneo.

## 5.5 Modelo de Drude

Este modelo proporciona una descripción adecuada, desde el punto de vista físico, del fenómeno de conducción eléctrica, basado en un modelo muy sencillo.

El modelo consiste en considerar a un conjunto de portadores de carga (electrones, de carga  $q = -e$  y masa  $m$ ), con densidad  $n$  por unidad de volumen. Por ejemplo, en un conductor metálico, existe un conjunto de iones, que se encuentran dispuestos formando un enrejado periódico, y tienen una movilidad mucho menor que los electrones. En presencia de un campo eléctrico, sólo los electrones se pueden mover, y lo hacen de acuerdo a las leyes de Newton, es decir, si  $\vec{v}$  es la velocidad de un electrón, entonces

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (-e) \vec{E}.$$

Por lo tanto, la velocidad de los electrones es de la forma

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e}{m} \vec{E} t.$$

Al modelo no le interesa el comportamiento de los electrones individuales, sino sólo el promedio sobre un número muy grande de electrones, por este motivo, la cantidad de interés es el promedio de la velocidad. Se hace entonces las siguientes hipótesis sobre el movimiento del conjunto de electrones:

- Los electrones se mueven libremente entre colisiones, las que son principalmente con los iones.
- Luego de cada colisión, los electrones ceden toda su energía a los iones.
- El tiempo promedio entre colisiones es  $\tau$
- La velocidad media de un conjunto de electrones es aleatoria.

De esta manera, la velocidad media de los electrones es

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle - \frac{e}{m} \vec{E} \langle t \rangle,$$

en que el promedio  $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ , por la hipótesis de movimiento aleatorio de los electrones, y  $\langle t \rangle = \tau$ . De esta manera, se puede determinar la corriente eléctrica,  $\vec{J} = nq\vec{v}$ ,

$$\vec{J} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}.$$

Vemos entonces que el modelo de Drude proporciona una manera sencilla de entender la ley de Ohm. Al mismo tiempo, permite entender el mecanismo de intercambio de energía que explica la ley de Joule. De acuerdo al modelo de Drude, la conductividad eléctrica es

$$g = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

## 5.6 Resistencia

Tomemos un alambre conductor largo, con una sección de área  $A$  y largo  $l$ . Sometamos los extremos de este conductor a una diferencia de potencial  $\Delta V$  (independiente del tiempo, el sistema se encuentra en régimen permanente). El campo eléctrico en el interior del alambre será  $\vec{E}$ , y la diferencia de potencial será

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

El campo eléctrico será paralelo al alambre (ya que no puede acumularse carga), luego

$$\Delta V = El.$$

La corriente  $I$  que pasa por el alambre es  $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , luego

$$I = JA = gEA,$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$\Delta V = RI,$$

en que  $R$  es la 'resistencia' del alambre,

$$R = \frac{l}{gA}.$$

En general, dado un objeto, su resistencia depende a la vez de sus características geométricas y su conductividad.

## 5.7 Circuitos de Resistencias

Es interesante considerar ‘circuitos’ formados por varias resistencias, conectadas de diversas maneras. Antes de entrar en mayores detalles respecto a estos circuitos, describiremos algunas de las formas mas comunes de conectar resistencias entre sí, a la vez que introducir el concepto de ‘resistencia equivalente’.

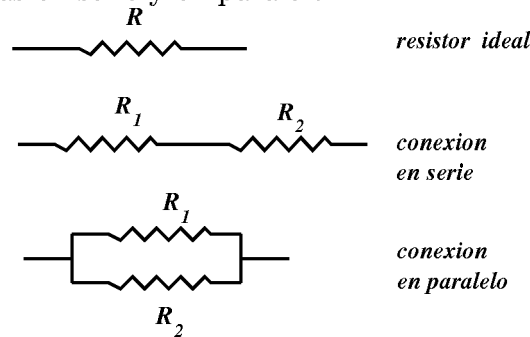
Consideremos un elemento resistivo; esto es, un conductor con conductividad finita  $g$  (un conductor perfecto tiene conductividad infinita). Si, por esta resistencia, pasa una corriente  $I$ , y la resistencia entre sus extremos  $a$  y  $b$  es  $R_{ab}$ , entonces la diferencia de potencial  $V_{ab}$  entre los extremos es

$$V_{ab} = R_{ab}I.$$

### 5.7.1 Conexiones Serie y Paralelo

Las formas más sencillas de conectar resistencias se conocen por los nombre de conexion ‘serie’ y ‘paralelo’, que describimos a continuacion.

Figura 5.3: Representacion de un resistor ideal, por medio de una línea qeubrada, y de las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo.



- a) **Conexión en Serie** Considerar dos (o mas) resistencias conectadas como muestra la figura. La diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  se puede escribir como

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}.$$

Como la corriente que circula por  $R_1$  y  $R_2$  es  $I$ , entonces

$$\begin{aligned} V_{ac} &= R_1 I \\ V_{cb} &= R_2 I \end{aligned}$$

For lo tanto,

$$V_{ab} = (R_1 + R_2)I,$$

luego podemos decir que la ‘resistencia equivalente’ de la combinacion de dos resitencias en serie es

$$R_{ab} = R_1 + R_2. \quad (5.4)$$

- b) **Conexión en Paralelo** En este caso, la diferencia de potencial entre los extremos de ambas resistencias es la misma,  $V_{ab}$

$$V_{ab} = V_1 = V_2$$

La corriente, en cambio satisface (por la ecuación de continuidad)

$$I = I_1 + I_2,$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= V_{ab}/R_1 \\ I_2 &= V_{ab}/R_2. \end{aligned}$$

Utilizando, finalmente, la relación  $V_{ab} = R_{ab}I$ , se debe cumplir

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5.5)$$

Es importante nota que **no todas la conexiones pueden reducirse a los casos 'serie' y 'paralelo'**.

## 5.8 Campos Eléctricos en Régimen Permanente

En régimen permanente, en un medio conductor, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= g\vec{E} \end{aligned}$$

El problema presente es determinar el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el medio conductor. De las relaciones anteriores se tiene,

$$\vec{\nabla} \cdot (g\vec{E}) = 0.$$

La otra relación importante es que el campo es estático, es decir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0,$$

que equivale a  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ . Juntando todo esto,

$$\vec{\nabla} \cdot (g\vec{\nabla}V) = 0.$$

Si el medio conductor es homogéneo, entonces se satisface la ecuación de Laplace, lo cual permite utilizar analogías electrostáticas en problemas con medios conductores en régimen permanente (teorema de unicidad).

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0.$$

### 5.8.1 Ejemplo

Se tienen dos conductores esféricos -perfectos-, concéntricos, de radios  $a$  y  $b$ , mantenidos a potenciales  $V_a$  y  $V_b$ , respectivamente. El espacio entre los conductores se llena con un material conductor homogéneo, de conductividad  $g$ . Determinar la corriente eléctrica, el campo eléctrico y la resistencia del sistema.

Solución: En la región entre los conductores perfectos, se satisface la ecuación de Laplace; que, en coordenadas esféricas es (suponiendo, además, que la solución es esféricamente simétrica)

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right).$$

La solución es, entonces, para  $a \leq r \leq b$

$$V(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2,$$

en que las constantes  $c_1$  y  $c_2$  deben satisfacer

$$\begin{aligned} V(a) &= V_a = -c_1/a + c_2 \\ V(b) &= V_b = -c_1/b + c_2. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene,

$$\begin{aligned} c_1 &= -(V_a - V_b)/(1/a - 1/b) \\ c_2 &= (V_a - V_b)/(b - a) \\ E(r) &= -c_1/r^2 \\ j(r) &= gE = -gc_1/r^2. \end{aligned}$$

La corriente total es  $I$ , y la resistencia son

$$\begin{aligned} I &= (V_a - V_b)/R \\ R &= (b - a)/(4\pi gab). \end{aligned}$$

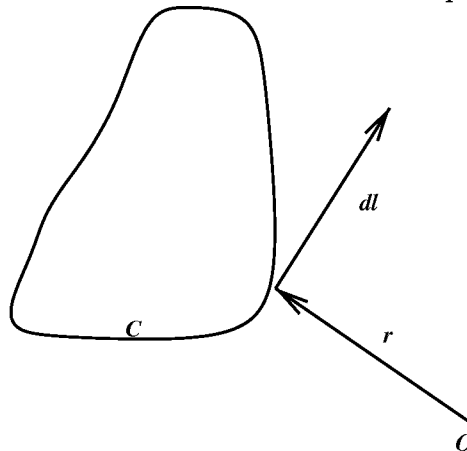
## 5.9 Fuerza Electromotriz

Como ya se ha mencionado, para mantener una corriente en régimen permanente, es necesario disponer de una fuente externa de energía. Las fuerzas que mueven las cargas son de origen no electrostático. No nos ocuparemos de su origen, sino de sus características generales.

Definamos lo que entenderemos en adelante por un circuito: Es una trayectoria cerrada, a través de un medio conductor, por donde fluye corriente eléctrica. Observamos que una corriente permanente en un circuito cerrado requiere de la acción de fuerzas no electrostáticas ('químicas', etc.). En efecto, consideremos un circuito ( $c$ ) por el que fluye una corriente  $I$ .

Si calculamos la circulación del campo eléctrico, a lo largo del circuito  $c$ , tenemos

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{gA} \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} \neq 0,$$

Figura 5.4: Un circuito cerrado cualesquiera,  $c$ .

puesto que  $\vec{j}$  es paralelo a  $d\vec{l}$  en todo punto. Por otra parte, si  $\vec{E}$  fuera un campo electrostático, la integral anterior sería cero, luego,  $\vec{E}$  no puede ser un campo puramente electrostático. Por lo tanto, para moverse en el conductor las cargas sentirán un 'campo efectivo'  $\vec{E}$ ,

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}^*,$$

en que  $\vec{E}_{ef}$  es el campo efectivo,  $\vec{E}$  es un campo electrostático y  $\vec{E}^*$  es un 'campo' no electrostático (entendido como una fuerza/unidad de carga adicional sobre los portadores de carga). Este campo adicional provee la energía externa necesaria para hacer circular la corriente, es lo que se llama 'fuerza electro-motriz' o, simplemente, 'fem'. Mas precisamente, se define la 'fem' (fuerza electro-motriz) de un circuito cerrado como

$$fem = \epsilon = \oint_c \vec{E}_{ef} \cdot d\vec{l}. \quad (5.6)$$

Como  $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , entonces

$$\epsilon = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l}.$$

## 5.10 Ecuación Fundamental de Circuitos

Tomemos un segmento  $a - b$  de un circuito,

De acuerdo a la ley de Ohm,

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}^* = \frac{1}{g} \vec{j}.$$

Integrando desde  $a$  hasta  $b$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int \vec{E}_{ef} \cdot d\vec{l} &= \int \vec{j} \cdot d\vec{l} / g \\ \int \vec{E}_{ef} \cdot d\vec{l} &= \int \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}^* \cdot d\vec{l}. \end{aligned}$$

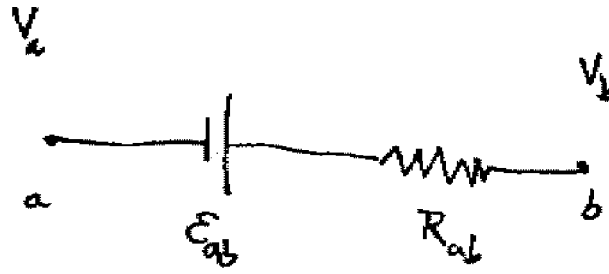


Figura 5.5: Ecuación fundamental de circuitos. Esta relación establece, para cada segmento de circuito, una relación entre la corriente, la resistencia, la diferencia de potencial y la f.e.m. en dicho segmento.

Tenemos, además

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{l} &= V_a - V_b \\ \int \vec{E}^* \cdot d\vec{l} &= \epsilon_{ab} \\ \int \vec{J} \cdot d\vec{l}/g &= R_{ab}I. \end{aligned}$$

en que  $\epsilon_{ab}$  es la 'fem' del tramo  $a - b$  (definición), y la última relación es fácil de probar para un alambre. Obtenemos entonces la relación

$$(V_a - V_b) + \epsilon_{ab} = R_{ab}I, \quad (5.7)$$

que también puede escribirse en la forma:

$$V_b - V_a = \epsilon_{ab} - R_{ab}I,$$

con la interpretación 'gráfica' de la figura 5.10.

## 5.11 Leyes de Kirchhoff

Se trata de dos 'reglas' que permiten estudiar circuitos en forma sistemática. Estas reglas se deducen en forma directa de las ecuaciones de campo. Para formular las leyes se necesita definir algunos conceptos:

- i) Circuito: Un camino conductor, en el que se encuentran fuentes de 'fem' (baterías).
- ii) Nudo o Nodo : Puntos en un circuito en los que se unen al menos tres conductores.
  - Ley de Nodos: Se deduce de la ecuación de continuidad -régimen permanente-. "La suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es siempre cero."
  - Ley de Mallas: Se deduce de la 'relación fundamental', discutida recientemente : 'En toda trayectoria cerrada en un circuito, la suma algebraica de las 'fem' y las caídas de potencial ( $RI$ ) es igual a cero'.

Observamos que para aplicar correctamente esta leyes es necesario establecer una convención:

- Cuando, al recorrer la trayectoria, nos movemos en el sentido de la corriente, la caída de potencial ( $RI$ ) tiene signo (-).
- Si al pasar por una fuente de 'fem' nos movemos del terminal (-) al terminal (+), la 'fem' en cuestion se toma con signo (+).

### 5.11.1 Ejemplo

Una bateria real es (puede considerarse como) una fuente de 'fem' ideal  $\epsilon$ , conectada en serie con una resistencia  $r_i$  (resistencia interna). Si conectamos una 'carga'  $R$  a la bateria, la corriente que fluye por el circuito es

$$I = \frac{\epsilon}{(r + r_i)},$$

la caída de tensión en la resistencia es

$$V_r = RI = \frac{R\epsilon}{(R + r_i)},$$

lo cual es cercano a  $\epsilon$  para  $r_i \ll R$ .

**Observacion:** Las ecuaciones de un circuito constituyen un sistema de ecuaciones lineales. Se puede demostrar (no lo haremos aqui) que este sistema siempre tiene solucion; ademas: En un circuito con  $r$  ramas y  $n + 1$  nodos se pueden escribir  $m$  ( $m = r - n$ ) ecuaciones de malla independientes y  $n$  ecuaciones de nodo. El número de ecuaciones independientes es  $m + n = r$ .

## 5.12 Balance de Energía y Ley de Joule

Supongamos que en el intervalo de tiempo  $dt$  se transporta una carga  $dq$  ( $dq = Idt$ ) entre el punto  $a$  y el punto  $b$  de un circuito. Al pasar de  $a$  a  $b$ , la energia de los portadores de carga  $dq$  experimenta un cambio  $dU_{ab}$ , dado por

$$dU_{ab} = (V_b - V_a)dq,$$

pero

$$V_b - V_a = \epsilon_{ab} - R_{ab}I.$$

entonces

$$dU_{ab} = (\epsilon_{ab}I - R_{ab}I^2)dt.$$

La interpretacion de esta ecuacion es la siguiente,  $\epsilon_{ab}Idt$  es la energia entregada por la fuente,  $R_{ab}I^2dt$  es la energia disipada en la resistencia. En un circuito cerrado,  $a = b$ , y  $V_a = V_b$ , luego  $\epsilon_{ab}I = R_{ab}I^2$ ; en otras palabras, la potencia entregada por la bateria es igual a la potencia disipada.

La energia que 'se va' del sistema se disipa en forma de calor. Esto constituye el llamado **efecto joule**. La presencia de un elemento resistivo va siempre acompañada de calentamiento en el circuito (esto es, a veces, deseable - calefactores electricos, etc.- y otras veces indeseable - parte de la energia disponible 'se malgasta').

### 5.13 Máxima transferencia de potencia

Volvemos al ejemplo de la batería con una carga  $R$  y resistencia interna  $r_i$ . La potencia disipada en la resistencia (carga) es  $P$ ,

$$\begin{aligned} P &= RI^2 \\ &= R\epsilon^2/(R + r_i)^2. \end{aligned}$$

La máxima potencia que se puede obtener de la batería es

$$P_{max} = \frac{\epsilon^2}{4r_i}.$$

Esto se obtiene de la condición de extremo

$$\frac{dP}{dR} = 0,$$

ya que

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\epsilon^2}{(R + r_i)^2} \left(1 - \frac{2R}{(R + r_i)}\right);$$

el resultado es que  $P = P_{max}$ , como función de  $R$ , cuando  $R = r_i$ , además

$$P_{max} = \frac{\epsilon^2}{4r_i}.$$

# Capítulo 6

## Magnetismo

El fenómeno del magnetismo se conoce desde hace miles de años. Las manifestaciones conocidas más antiguamente son las que corresponden, primero, a los imanes, que se encuentran naturalmente en la forma de algunos depósitos minerales, como la magnetita. Posteriormente, probablemente los chinos, descubrieron el magnetismo terrestre, produciendo como resultado tecnológico la invención de la brújula, y su posterior aplicación a la navegación marítima. El estudio sistemático de los fenómenos magnéticos comenzó hace algunos siglos, y encontrándose a Gauss entre los investigadores que realizaron contribuciones de importancia. En el siglo pasado, Oersted (cerca de 1820) descubrió que las corrientes eléctricas dan origen a efectos magnéticos, en particular, la corriente eléctrica que circula por un conductor produce un efecto que es completamente equivalente al que produce un imán, siendo capaz de atraer objetos de hierro, deflectar una brújula, etc.

Nosotros comenzamos nuestro estudio siguiendo no el camino histórico, sino el desarrollo de la teoría en base a los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas, debido a que permite un enfoque unificador de los fenómenos magnéticos bajo un solo modelo teórico.

### 6.1 Ley de Biot y Savart

Debido a que es más sencillo, estudiaremos primero los efectos magnéticos de corrientes en régimen permanente. Los experimentos realizados el siglo pasado para determinar las fuerzas magnéticas entre conductores con corriente (Oersted, Ampere, etc.) se pueden presentar en forma resumida en la expresión que sigue, que permite calcular la fuerza magnética sobre el circuito  $c_1$ , debida al circuito  $c_2$ :

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 \wedge (d\vec{l}_2 \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.1)$$

Esta es la llamada ley de Biot-Savart, que describe la fuerza magnética entre dos circuitos con corriente. El número  $\mu_0/4\pi$  es, por definición, igual a  $10^{-7} \text{Newton}/(\text{Ampere})^2$ .

#### 6.1.1 Fuerza entre dos alambres paralelos.

Calculemos, como primera aplicación de la ley de Biot-Savart, la fuerza entre dos alambres muy largos, que llevan corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . Tenemos, en primer lugar, las coordenadas de los puntos

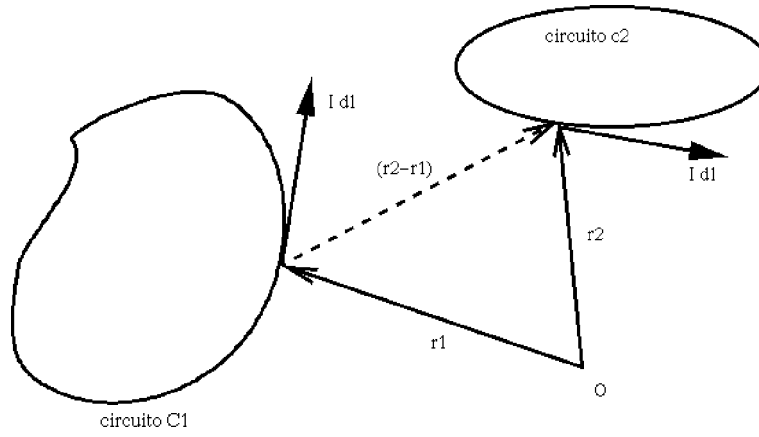


Figura 6.1: Ley de Biot y Savart. Elementos para el cálculo de la fuerza entre dos circuitos, C1 y C2.

de los dos alambres, en que el primer alambre coincide con el eje  $z$ , y el segundo pasa por  $y = a$ , y es paralelo al anterior.

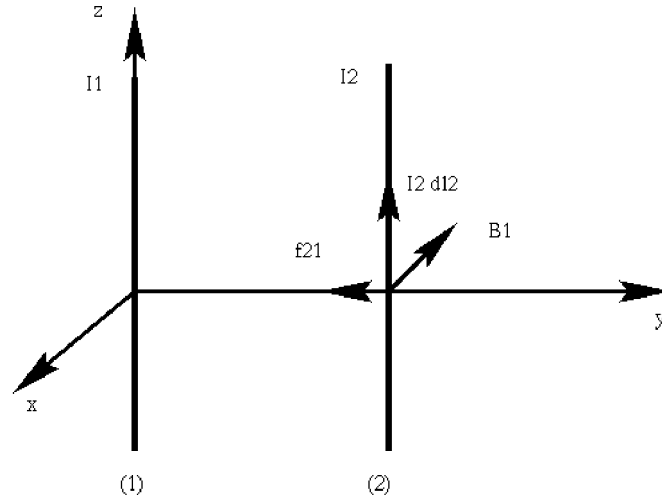


Figura 6.2: Fuerza entre dos alambres paralelos.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= z_1 \hat{k} \\ \vec{r}_2 &= a \hat{j} + z_2 \hat{k}\end{aligned}$$

La fuerza es entonces,

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{k} dz_2 \wedge [\hat{k} dz_1 \wedge ((z_2 - z_1) \hat{k} + a \hat{i})]}{((z_2 - z_1)^2 + a^2)^{3/2}}.$$

La fuerza total es infinita (porque los alambres son infinitos), pero la fuerza por unidad de largo es finita, y vale

$$\vec{f}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \hat{j}.$$

La fuerza es atractiva si las corrientes tienen el mismo signo, y repulsiva en caso contrario. Observar que, a pesar de la apariencias, se cumple la relación

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0.$$

## 6.2 Campo Magnético

A partir de la ley de fuerzas se puede definir un campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$ , con el propósito de representar el efecto de una corriente sobre otra. Usando la ley de Biot-Savart, definimos

$$d\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.2)$$

con esto, la fuerza magnética se escribe como

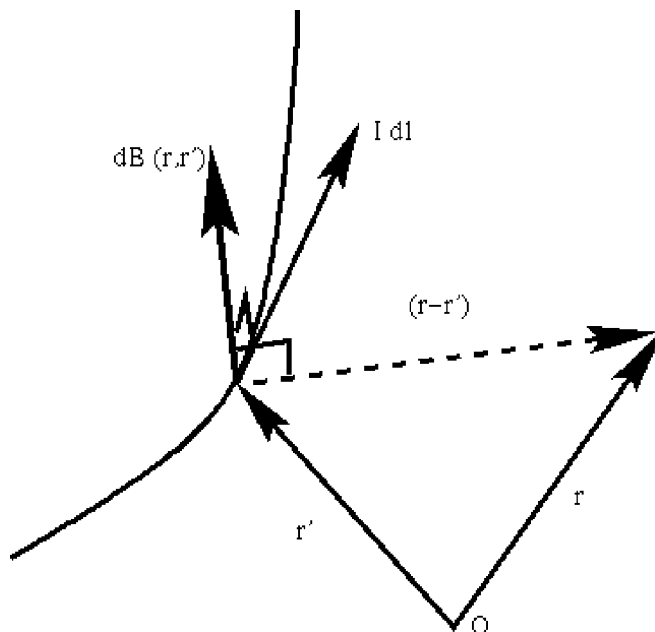
$$\vec{F}_{21} = \int_{c_1} I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2(\vec{r}_1),$$

donde  $\vec{B}_2(\vec{r})$  es - por definición- el campo magnético producido por el circuito  $c_1$  en el punto  $\vec{r}$ .

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.3)$$

De esta manera, al igual que hicimos en el caso electrostático, no estudiaremos la fuerza total que un circuito ejerce sobre otro, sino solamente la fuerza por unidad de longitud (y corriente); esta cantidad es la que llamamos el campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$ .

Figura 6.3: Geometría del campo magnético. La regla de la mano derecha.



Nota: En MKSA, el campo magnético se mide en Tesla, que equivale a  $1\text{Tesla} = 1\text{Newton}/(\text{Am}) = 1\text{Weber}/\text{m}^2$ .

## 6.3 Ejemplos

### 6.3.1 Alambre Infinito

Calculemos el campo producido por un alambre recto, de largo infinito, por el que circula una corriente  $I$ . Escojamos las coordenadas de manera que el alambre esté colocado sobre el eje  $z$ . Por la simetría cilíndrica del problema, la magnitud del campo magnético debe depender solamente de la distancia del punto de observación al eje, esto es  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y ser independiente de  $z$ , por el hecho de que el alambre es infinitamente largo.

Comenzamos indicando el vector de posición  $\vec{r}$  del punto de observación, y el del punto de la fuente,  $\vec{r}'$ ,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \vec{r}' = z'\hat{k}.$$

Usando ahora la definición del campo magnético, podemos expresar sus componentes cartesianas, en la forma:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I y dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ B_y(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I x dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ B_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que, para calcular ambas componentes será suficiente calcular la integral siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{[r^2 + u^2]^{3/2}} = \frac{2}{r^2}.$$

Este último resultado se había obtenido anteriormente, al calcular el campo eléctrico debido a un alambre infinitamente largo. En definitiva podemos expresar nuestro resultado en la forma:

$$\vec{B}(r, \phi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

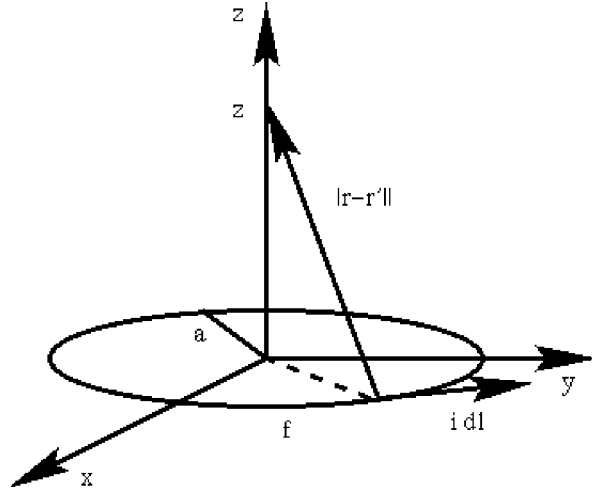
### 6.3.2 Espira Circular

Calculemos ahora el campo producido por una anillo (o espira) circular, de radio  $a$ , en un punto de su eje. Escogemos los ejes de manera que el origen coincide con el centro de la espira, y el eje  $z$  es perpendicular el plano de la espira, como se indica en la figura. La corriente  $I$  circula en el sentido contrario a los punteros del reloj, por lo tanto, de acuerdo a la regla de la mano derecha, el campo magnético en el eje  $z$  debe estar dirigido a lo largo del eje  $z$ . El campo fuera del eje es muy difícil de calcular analíticamente, por lo cual sólo calcularemos el campo en el eje, es decir,  $\vec{B}(0, 0, z)$ . Comenzamos por indicar los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ ,

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}' = a(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) = a\hat{r}.$$

Con esto podemos evaluar todos los términos de la definición del campo, obteniendo

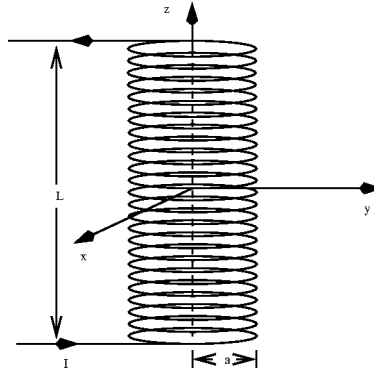
$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z\hat{k} + a^2\hat{k})d\phi}{[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \hat{k}.$$

Figura 6.4: Una espira circular de radio  $a$ , por la que circula la corriente  $I$ .

Este resultado se obtiene pues la integral  $\int \hat{r} d\phi = 0$ , mientras que la otra  $\int \hat{k} d\phi = 2\pi \hat{k}$ . Observemos que, en este resultado el campo depende de  $z$ , que representa la distancia entre el punto  $z$  y el centro de la espira.

### 6.3.3 Solenoide

Calculemos ahora el campo, en el eje de un solenoide de  $N$  vueltas, radio  $a$  y largo  $L$ . Podemos expresar los vectores de posición del observador y la fuente,

Figura 6.5: Un solenoide de radio  $a$  y largo  $L$ , por el que circula la corriente  $I$ .

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}' = a\hat{r} + (h/2\pi)\phi\hat{k},$$

en que  $-L/2 < z' < L/2$ ,  $\hat{r} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$ ,  $-N\pi < \phi < N\pi$ , y  $h = L/N$  es el paso de la hélice. Podemos expresar en forma de integral las tres componentes del campo en el eje  $z$  es, pero sólo indicaremos la componente  $z$

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_{-N\pi}^{N\pi} \frac{d\phi}{[a^2 + (z - h\phi/2\pi)^2]^{3/2}}.$$

Usamos los cambios de variable  $u = h\phi/2\pi + z$ , y luego definimos el ángulo  $\theta$  tal que  $u = atg(\theta)$ , entonces:

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2h} \int_{-(L/2+z)}^{L/2-z} \frac{du}{[a^2 + u^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta) d\theta.$$

El resultado final es,

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 m I}{2} [\text{sen}(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)],$$

en que

$$tg(\theta_2) = \frac{(L/2 - z)}{a} \quad tg(\theta_1) = -\frac{(L/2 + z)}{a}.$$

Por lo tanto,

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{(L/2 - z)}{[a^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2}} \quad \text{sen}(\theta_1) = -\frac{(L/2 + z)}{[a^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2}}.$$

. Se acostumbra a definir el número de vueltas por unidad de largo de la bobina,  $m = 1/h = N/L$ , entonces, el campo en el eje  $z$  tiene el valor

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 m I}{2} \left[ \frac{(L/2 - z)}{[a^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2}} + \frac{(L/2 + z)}{[a^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2}} \right].$$

Podemos demostrar que las componentes horizontales  $B_x$  y  $B_y$ , en el eje  $z$  son muy pequeñas, si el solenoide es muy largo ( $L \gg a$ ) y el enrollado es muy apretado ( $N \gg 1$ ). En este caso, el campo es muy uniforme dentro del solenoide, con el valor aproximado

$$B_z = \mu_0 m I,$$

excepto cerca de los bordes,  $z = \pm L/2$ , en que el campo

### 6.3.4 Plano Infinito

Como un último ejemplo, consideremos el campo producido por una corriente confinada a un plano (el plano  $xy$ ), con corriente superficial  $\vec{J}_s = J_s \hat{y}$ . De acuerdo a la regla de la mano derecha, y a la simetría del problema, el campo debe tener la forma

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z) \hat{i},$$

en que  $B(z) = -B(-z)$ . Para proceder sistemáticamente, basta calcular el campo en un punto del eje  $z$ , tomando  $\vec{r} = z\hat{k}$ , y  $\vec{r}' = (x, y, 0)$

$$\begin{aligned} B_x(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 J_s z}{4\pi} \iint \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ B_y(0, 0, z) &= 0 \\ B_z(0, 0, z) &= 0. \end{aligned}$$

La componente  $x$  del campo es  $B_x(0, 0, z) = B(z)$ , y se puede escribir como (transformando a coordenadas cilíndricas)

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_s z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 J_s z}{2} \int_0^\infty \frac{r dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Evaluando, se obtiene

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_S}{2} \frac{z}{|z|}.$$

## 6.4 Fuerza de Lorentz

Una partícula cargada, en presencia de un campo magnético  $B(\vec{r})$  experimenta una fuerza  $\vec{F}$ , dada por (la llamada fuerza de Lorentz)

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (6.4)$$

Notamos que la fuerza depende de la carga eléctrica  $q$ , y la velocidad de la carga. Una partícula inicialmente en reposo no experimenta fuerza magnética. Si la partícula se encuentra en movimiento, experimenta una fuerza que es perpendicular a la velocidad y al campo magnético.

Para el caso de un circuito, ya hemos visto que la fuerza está dada por la expresión

$$\vec{F} = \int_c I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

También, para una distribución de corrientes  $\vec{j}(\vec{r})$  se escribe:

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r}) d^3r.$$

### 6.4.1 Movimiento de Partículas Cargadas en Campos Magnéticos

Usando la ley de Newton, en conjunto con la fuerza de Lorentz, la ecuación de movimiento de una partícula es (no relativista)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (6.5)$$

Si multiplicamos esta ecuación por la velocidad, obtenemos:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0,$$

lo que equivale a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = 0.$$

La cantidad entre paréntesis es la energía cinética de la partícula. Lo que la expresión anterior dice es que cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  -uniforme o no -, su energía cinética permanece constante.

### 6.4.2 Campo Magnético Uniforme

Si el campo magnético es uniforme, además de lo anterior, podemos ver que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0,$$

lo cual equivale a:

$$\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{v}) = 0.$$

Por lo tanto, la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético uniforme es una hélice. Por componentes (cartesianas), las ecuaciones de movimiento son (se ha definido como eje  $z$ , al eje del campo magnético)

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{qB}{m}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{qB}{m}v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Llamando  $\omega_c = qB/m$ , la solución del sistema tiene la forma:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= A \sin(\omega_c t + \phi) \\ v_y(t) &= A \cos(\omega_c t + \phi) \\ v_z(t) &= \text{const.},\end{aligned}$$

de donde se ve que la trayectoria es una helice de paso  $h = v_z T$ , en que  $T = 2\pi/\omega_c$  es el período del movimiento circular en torno a la dirección del campo magnético.

## 6.5 Propiedades del Campo Magnético

Por el momento nos restringimos a campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias (o de régimen permanente),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_c \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Demostraremos que el campo magnético previamente definido satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.6)$$

La demostración es simplemente un cálculo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_c \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

usamos una identidad vectorial,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}),$$

en que tomamos  $\vec{a} = d\vec{l}$  (la integración es c/r a las coordenadas con ') y  $\vec{b} = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ , y tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge d\vec{l} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{b} &= 0,\end{aligned}$$

lo último porque  $\vec{b}$  es el gradiente de  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ , lo cual completa la demostración.

Es importante destacar que que la ley está en relación directa con la no existencia de 'cargas magnéticas' (comparar con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ ), un hecho experimental. Lo que significa la demostración matemática es que nuestra definición de campo magnético  $\vec{B}$  es compatible con esta ley.

- no hay cargas magnéticas (ley experimental)
- campo magnético es solenoidal.
- las líneas de campo magnético son siempre cerradas.

## 6.6 Potencial Magnético

Veremos que es posible definir un potencial vectorial,  $\vec{A}(\vec{r})$ , en forma análoga a como se define el potencial electrostático. La relación (ley)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implica matemáticamente que existe una función vectorial  $\vec{A}(\vec{r})$  que satisface:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}).$$

Inversamente, si  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})$ , entonces  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . El vector  $\vec{A}$  es el llamado potencial magnético vectorial.

Notemos que, dado  $\vec{B}$ , el potencial  $\vec{A}$  puede calcularse usando la definición  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$ , que constituye una ecuación diferencial para  $\vec{A}(\vec{r})$ . No cabe duda que hay al menos una solución. La verdad es que hay infinitas. Esto no debe preocuparnos, ya que lo que interesa físicamente es  $\vec{B}$  y no  $\vec{A}$  (esto no es del todo trivial, como lo muestra el experimento de Bohm-Aharonov).

Para ilustrar lo anterior, supongamos que  $\vec{A}(\vec{r})$  y  $\vec{A}'(\vec{r})$  dan lugar al mismo campo magnético  $\vec{B}$ , es decir

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' &= \vec{B},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A}' - \vec{A}) = 0.$$

Esto no implica que  $\vec{A}' = \vec{A}$ , sino que

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} K,$$

en que  $K$  es una función escalar (invariancia de medida o 'de gauge'). Por qué ocurre esto?. En realidad, la definición de  $\vec{A}$  no define un único potencial (como ya vimos), para hacer tal cosa se necesita saber algo mas de  $\vec{A}$ ; específicamente, hay que conocer la divergencia de  $\vec{A}$ , pero no hay ninguna condición física que nos dé esta información, lo que significa que puede ser elegida 'a gusto'. Una elección conveniente es tomar el 'Gauge de Coulomb',

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

lo que posibilita el cálculo de  $\vec{A}(\vec{r})$ . Para una corriente en un circuito filiforme,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_c \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad (6.7)$$

mientras que, para una distribución de corriente en volumen,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.8)$$

Es fácil comprobar que estos potenciales efectivamente satisfacen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Notemos además la similaridad que existe entre este potencial (magnético) y el potencial electrostático. Esta analogía nos lleva a concluir que :

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= -\nabla^2 \vec{A} \end{aligned}$$

luego, se tiene la ley de Ampere,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}. \quad (6.9)$$

Notar que esta ecuación es compatible con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . La ley de Ampere puede tambien escribirse en forma integral, usando la corriente enlazada

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

y el teorema de Stokes,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (6.10)$$

donde  $I$  es la corriente encerrada por el circuito  $c = \partial S$  (borde de la superficie a través de la cual fluye la corriente).

## 6.7 Aplicaciones de Ley de Ampere

### 6.7.1 Alambre infinito

Volvemos sobre este ejemplo, ya discutido, y calculemos el campo magnético usando la ley de Ampere. Para esto consideramos una trayectoria circular  $C_r$ , de radio  $r$ , cuyo centro está en el alambre, y está contenida en el plano perpendicular al alambre. El campo magnético tiene simetría cilíndrica, lo que se puede expresar en la forma

$$\vec{B} = B(r) \hat{\phi}.$$

Por esto, es posible expresar la circulación de  $\vec{B}$  en la forma

$$\oint_{C_r} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r).$$

El resultado anterior es de aplicación a todos los casos de simetría cilíndrica. Con esto, podemos igualar con la corriente encerrada por el circuito  $C_r$  (multiplicada por  $\mu_0$ ), obteniendo finalmente

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

### 6.7.2 Cilindro

El caso de un cilindro que lleva una corriente distribuída tambien se puede resolver usando la ley de Ampere, si la corriente tiene simetría cilíndrica tambien, con

$$\vec{J} = J(r)\hat{k}.$$

En este caso es aceptable culaquier distribución de corriente en que  $J = J(r)$ , y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Aquí consideraremos sólo el caso en que  $J = J_0$  (constante), es decir, una distribución uniforme. Igual que en el caso anterior, la circulación es  $2\pi r B(r)$ . Lo que cambia es la corriente encerrada por el circuito  $C_r$ , que tiene expresiones diferentes según se trate de  $r > a$  y  $r < a$ .

Si  $r > a$ , estamos en el mismo caso anterior, en que  $I = I_0$  es la corriente total,  $I_0 = \pi a^2 J_0$ . Si  $r < a$ , entonces la corriente encerrada por el circuito  $C_r$  es función de  $r$ , y vale  $I(r) = \pi r^2 J_0$ . Con esto, el campo magnético, para  $r < a$  se puede expresar como

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}.$$

### 6.7.3 Potencial para Campo uniforme

Se puede comporbar con mucha facilidad que el potencial magnético  $\vec{A}$  correspondiente a un campo magnético uniforme,  $\vec{B} = B_0\hat{k}$  es

$$\vec{A} = (1/2)\vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{B_0}{2}(x\hat{j} - y\hat{i}).$$

Podemos agragar que existen muchos potenciales distintos que generan el mismo campo  $\vec{B}$  por medio de la operación  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ . En efecto, considere los potenciales

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= B_0 x \hat{j} \\ \vec{A}_2 &= - B_0 y \hat{i}.\end{aligned}$$

Además, se puede ver que la diferencia entre ambos se puede expresar como el gradiente de una función escalar, y por lo tanto, ambos potenciales generan el mismo campo magnético.

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = B_0 x \hat{j} + B_0 y \hat{i} = \vec{\nabla}(B_0 xy).$$

## 6.8 Expansión Multipolar de $\vec{A}$

Consideremos el potencial magnético de un circuito  $c$ , por el cual circula una corriente  $I$ . Llamemos  $R$  al 'radio' del circuito, definido como la máxima distancia entre dos puntos del circuito,

$$R = (1/2) \text{Max}_{\{\vec{r}, \vec{r}' \in c\}} |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Esta definición se reduce al radio usual, para un circuito circular, de manera que es una buena definición. Calculemos el potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  a gran distancia del circuito (esto es, el punto de observación  $r$  está a una distancia  $\gg R$ ),  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg R$ , para todo  $\vec{r}' \in c$ .

Usamos la expansion multipolar,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots \right)$$

luego,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right) d\vec{l},$$

en que se ha usado el hecho

$$\int_c d\vec{l} = 0.$$

Se puede demostrar que esta expresión anterior para  $\vec{A}$  es equivalente a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}, \quad (6.11)$$

en que  $\vec{m}$  es el momento dipolar magnético,  $\vec{m} = I\vec{S}$ , y  $\vec{S}$  es un el área del circuito. Si el circuito es plano,  $\vec{S}$  es perpendicular al plano del circuito, y su magnitud es igual al área geométrica del circuito.

$$\vec{S} = (1/2) \oint_c \vec{r} \wedge d\vec{r}.$$

El campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  se obtiene fácilmente, tomado el rotor de  $\vec{A}$ ; con el resultado:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right).$$

Es fácil probar que (se propone como ejercicio)

- la fuerza sobre un dipolo magnético en un campo magnético uniforme es cero.
- el torque sobre un dipolo -en un campo magnético uniforme- es  $\vec{m} \wedge \vec{B}$ .

# Capítulo 7

## Propiedades Magnéticas de la Materia

De acuerdo a sus propiedades magnéticas, los medios materiales se pueden clasificar en

- i) diamagnéticos: Los materiales diamagnéticos son ‘débilmente repelidos’ por las zonas de campo magnético elevado.
- ii) paramagnéticos: Débilmente atraído por las zonas de campo magnético intenso. Se observa frecuentemente en gases.
- iii) ferromagnéticos: Fuertemente atraídos por las zonas de campo magnético intenso (presentan además fenómenos de histéresis y existen dominios ferromagnéticos). Se observa en fierro, níquel, cobalto y aleaciones.

### 7.1 Modelo de Magnetismo

Cualitativamente, el comportamiento magnético de los materiales, se puede entender en términos del siguiente modelo: El campo magnético externo ( $\vec{B}$ ) orienta o induce dipolos magnéticos microscópicos ( magnetización  $\vec{M}$ ), esto, a su vez, da origen a un campo magnético que se superpone al campo original. El campo total, a su vez, actúa sobre  $\vec{M}$ . Puede pensarse que este es un proceso dinámico de ajuste, el que llega al estado estacionario muy rápidamente. Se ha encontrado, en forma experimental, que  $\vec{M}$  es proporcional al campo  $\vec{B}$ , para materiales ‘dia’ y ‘para’ magnéticos. El caso ferromagnético es más complicado, y sólo lo describiremos brevemente más tarde.

Yendo un poco mas al aspecto microscópico, se puede imaginar que la magnetización  $\vec{M}$  proviene de la existencia de ciertas ‘corrientes atómicas’. En esta teoría, los átomos se comportan como pequeños dipolos magnéticos, de momento magnético  $\vec{m}$ , dado por

$$\vec{m} = A i \hat{n}$$

en que  $A$  es el área de la órbita del electrón,  $i$  es la corriente electrónica,  $i = q/T$ ,  $T$  es el período de la órbita, y  $e$  la carga del electrón. Tambien se puede escribir

$$m = \left(\frac{\omega a^2}{2}\right)q.$$

Estas ‘corrientes atómicas’ están ligadas a los átomos, por lo cual no producen transporte de carga neta en un volumen finito de material. El mecanismo de producción de fenómenos magnéticos es entonces claro, pues las corrientes anteriores (llamadas ‘de magnetización’) producirán un campo magnético finito.

Para entender correctamente el magnetismo se requiere una teoría microscópica, que explique cómo aparecen las corrientes atómicas a las que nos referimos previamente, y permita calcularlas. Nosotros consideraremos sólo el aspecto macroscópico del magnetismo.

## 7.2 Magnetización

Definimos la magnetización  $\vec{M}$ , como la densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen,

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \vec{m}_i \quad (7.1)$$

de esta manera,  $\vec{M}$  es una función del punto  $\vec{r}$ ,  $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$ . Una muestra de material está magnetizada si  $\vec{M} \neq \vec{0}$ , y desmagnetizada si  $\vec{M} = \text{vec}0$ .

El momento dipolar magnético de una porción  $dV'$  de material será:

$$d\vec{m}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}')dV'$$

Recordemos que un dipolo magnético de momento  $\vec{m}$  produce un campo magnético  $\vec{B}$ , que puede obtenerse a partir del potencial  $\vec{A}(\vec{r})$ . La contribución del momento magnético  $d\vec{m}(\vec{r}')$ , localizado en  $\vec{r}'$ , al potencial en  $\vec{r}$  es :

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \wedge \vec{R}}{R^3}, \quad (7.2)$$

en que  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . El potencial total es entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.3)$$

Obtengamos ahora el campo  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{\nabla} \wedge \left[ \vec{M}(\vec{r}') \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV'. \quad (7.4)$$

Para hacer este cálculo, recordemos la identidad vectorial:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.5)$$

Con esto, podemos escribir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{M}(\vec{r}') \wedge \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \quad (7.6)$$

Para simplificar esta expresión, podemos usar la identidad

$$\vec{\nabla}' \wedge \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{M}(\vec{r}') \right] = \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|r - r'|} \right) \wedge \vec{M}(\vec{r}') + \frac{1}{|r - r'|} \vec{\nabla}' \wedge \text{vec} M.$$

El primer término del segundo miembro es precisamente nuestro integrando, excepto por el orden de los factores del producto vectorial. Podemos reordenar los factores de manera que

$$\vec{M}(\vec{r}') \wedge \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|r - r'|} \right) = \frac{1}{|r - r'|} \vec{\nabla}' \wedge \vec{M}(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \wedge \left( \frac{1}{|r - r'|} \vec{M}(\vec{r}') \right).$$

Con esto, podemos escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|r - r'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{\nabla}' \wedge \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{M}(\vec{r}') \right] dV', \quad (7.7)$$

donde  $\vec{J}_M(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{M}(\vec{r})$ . Además podemos usar la identidad

$$\int_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) dV = \oint_{S(V)} \hat{n} \wedge \vec{F} dS = - \oint \vec{F} \wedge d\vec{S}. \quad (7.8)$$

Si definimos la 'corriente superficial de magnetización',  $\vec{J}_M^S$ ,

$$\vec{J}_M^S(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \wedge \hat{n}', \quad (7.9)$$

entonces podemos escribir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|r - r'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{J}_M^S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \hat{n}' dS'. \quad (7.10)$$

El cálculo no está concluido, pues todavía hay que calcular el rotor de  $\vec{A}(\vec{r})$ , lo cual sería un cálculo bastante largo, si lo emprendiéramos de manera directa. Sin embargo, el haber trabajado con el potencial  $\vec{A}$  nos da dividendos ahora, pues nuestros resultados indican que el campo magnético producido por la magnetización  $\vec{M}$  es el mismo que producen las distribuciones de corriente  $\vec{J}_M$  y  $\vec{J}_M^S$ . Además, ya conocemos la ley de Ampere, luego,

$$\vec{\nabla} \wedge B_M(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}_M,$$

en que el campo  $\vec{B}_M = \vec{\nabla} \wedge A_M(\vec{r})$  es el producido por la magnetización  $\vec{M}$ .

El campo magnético total es la superposición del campo producido por ciertas corrientes reales  $\vec{J}$ , y el producido por la magnetización del material,  $\vec{M}$ , a los cuales denominamos  $\vec{B}_J$  y  $\vec{B}_M$ , respectivamente, entonces

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_J(\vec{r}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_M(\vec{r}) = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M).$$

Por último, reemplazando la corriente de magnetización  $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$ , y definiendo el campo  $\vec{H}$ , tenemos

$$\mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \vec{B}.$$

Tabla 7.1: Valores de la susceptibilidad magnética para algunos materiales

| Material        | $\chi_m$               |               |
|-----------------|------------------------|---------------|
| Aluminio        | $2 \times 10^{-5}$     | paramagnético |
| $CO_2$ (1 atm.) | $-119 \times 10^{-8}$  | diamagnético  |
| Bi              | $-1,6 \times 10^{-4}$  | diamagnético  |
| Cu              | $-0.98 \times 10^{-5}$ | diamagnético  |
| etc.            |                        |               |

Podemos ver que  $\vec{H}$  satisface una relación diferencial simple, llamada 'ley de Ampere' (generalizada), que se obtiene de la definición de  $\vec{H}$ ,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}. \quad (7.11)$$

Con esto, las ecuaciones de campo para el magnetismo en medios materiales ( en condiciones estáticas) son las que siguen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.12)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}, \quad (7.13)$$

las que deben ser suplementadas con la definición de  $\vec{H}$ , además de la relación experimental entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ , de la que discutiremos próximamente.

De la ecuación  $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$  deducimos ahora la forma generalizada de la 'ley circuital de Ampere':

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (7.14)$$

### 7.3 Susceptibilidad magnética

Falta una relación entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  (análoga a la relación entre  $\vec{j}$  y  $\vec{E}$  para medios conductores). Para una gran cantidad de materiales se cumple una relación lineal :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (7.15)$$

La cantidad  $\chi_m$  es adimensional y se denomina susceptibilidad magnética

- El material se denomina paramagnético si  $\chi_m > 0$ .
- El material se denomina diamagnético si  $\chi_m < 0$ .
- Si  $\chi_m \gg 1$ , el material es ferromagnético.

La susceptibilidad  $\chi_m$  mide la capacidad de los momentos magnéticos microscópicos a alinearse con el campo externo. Se define también la 'permeabilidad magnética' del medio  $\mu$ , que establece una relación de proporcionalidad entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ ,

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H},$$

entonces  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ . Para los materiales no ferromagnéticos se puede decir que  $\mu \approx \mu_0$ , en cambio, los ferromagnéticos tienen permeabilidades muy altas,  $\mu/\mu_0 \gg 1$  (este cociente puede valer del orden de 5000).

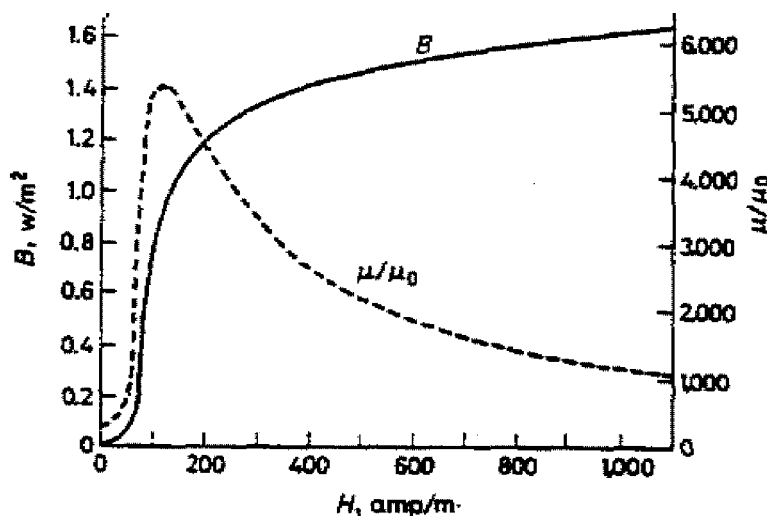


Figura 7.1: Curva de magnetización y permeabilidad relativa del hierro comercial (recocido).

## 7.4 Ferromagnetismo e Histéresis

Como se ha indicado, los materiales ferromagnéticos afectan drásticamente las características de los sistemas en los que se los usa. Los materiales ferromagnéticos no son 'lineales'. Esto significa que las relaciones entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  (o entre  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$ ) no corresponden a líneas rectas. En realidad, lo que ocurre es más complicado e interesante; la relación entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  presenta el fenómeno de *histéresis*. Esto significa que, cuando se somete al material a un ciclo de operación, la magnetización (relación  $B - H$ ) sigue una curva complicada. En general, se considera que el campo excitante es  $H$  (pues está directamente relacionado a la corriente). Puede entonces ocurrir que  $H = 0$ , y tanto  $B$  como  $M$  sean distintos de cero: esto es lo que se conoce corrientemente como un imán. Los materiales ferromagnéticos son el Hierro, Niquel, Cobalto, y algunas aleaciones. Desde el punto de vista tecnológico son muy importantes para aplicaciones en generación de energía, motores eléctricos, almacenamiento de información (cintas y discos magnéticos), etc.

Para entender el fenómeno, se considera una muestra de material ferromagnético, inicialmente desmagnetizada. Se considera que el parámetro de control experimental es el campo  $\vec{H}$ , pues éste está directamente relacionado a la corriente eléctrica (por la ley de Ampère). Si el campo  $\vec{H}$  se incrementa, desde cero, la magnetización del material crecerá monótonamente, describiendo una curva como la de la figura 7.4. Si uno definiera  $\mu = B/H$ , el valor de  $\mu$  sería una función de  $H$  con un rango de variación de varios órdenes de magnitud. Se observa, en primer lugar la existencia de una *saturación*; esto es, que si el campo  $H$  alcanza un valor suficientemente elevado, la magnetización  $M$  alcanza un valor máximo, que depende del material. Este resultado experimental puede entenderse simplemente, pues significa que en una muestra saturada todos los dipolos magnéticos elementales se han alineado con el campo  $H$ .

Imagínese ahora la muestra ya magnetizada, y en presencia de un campo  $\vec{H}$ . Si ahora se disminuye  $\vec{H}$ , la relación  $B - H$  no describe la curva inicial de la figura anterior 7.4, sino que regresa por una nueva curva, como la de la figura 7.4 siguiente, llegando hasta el punto  $\mathbf{r}$ , en que  $H = 0$ , pero  $B \neq 0$ . Si ahora se continúa aumentando  $H$  en sentido inverso al original, la muestra adquiere una magnetización invertida, pasando por el punto  $\mathbf{c}$ , en que  $B = 0$ , pero

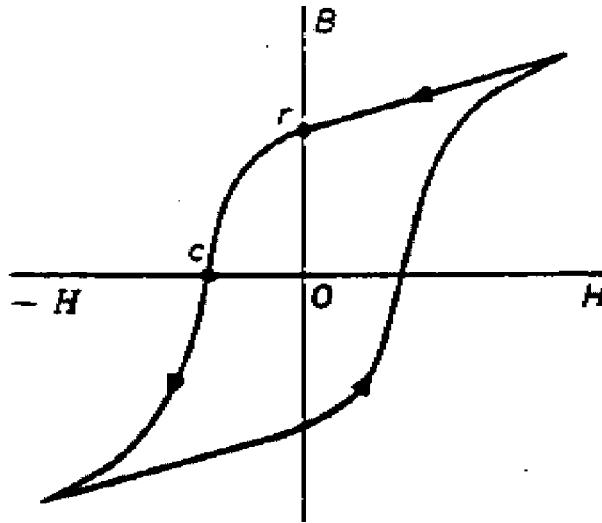


Figura 7.2: Curva de histéresis para un material ferromagnético.

$H \neq 0$ . Si ahora se hace aumentar  $H$ , entonces  $B$  regresa por la parte inferior de la curva  $B-H$ . Se observa que la curva para  $H$  creciente es distinta a aquella para  $H$  decreciente. Este fenómeno se denomina histéresis, y la figura 7.4 es la llamada *curva de histéresis del material*.

Se observa que la curva de histéresis depende del material, pero además del valor máximo de  $H$  al cual se encuentra sometido el material. Si el valor de  $H_{max}$  es suficientemente intenso, la forma de la curva no cambia al aumentar  $H_{max}$ , como se observa en la figura 7.4 que sigue.

Las aplicaciones más frecuentes de los materiales ferromagnéticos son (1) para aumentar el flujo en circuitos de corriente (motores, generadores), (2) como fuentes de campo magnético (imanes) y (3) en almacenamiento magnético de información. Cuando una muestra de material ferromagnético se utiliza como imán, primero se le magnetiza hasta su saturación, y luego se elimina el campo  $H$ . El campo magnético remanente  $B = r$  se llama retentividad.

Para ilustrar la gran variedad de comportamiento magnético entre los materiales ferromagnéticos, mostramos las curvas de histéresis para dos materiales distintos, el fierro comercial y un acero al tungsteno, en la Figura 7.4.

## 7.5 Ejemplos

### 7.5.1 Condiciones de Borde y Aplicación

Estudiaremos la interfaz de dos medios materiales magnéticos; nos interesa establecer las condiciones de borde que satisfacen los vectores de campo, al cruzar dicha interfaz. Para hacer esto, utilizamos las ecuaciones de campo:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.16)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (7.17)$$

Figura 7.3: Curvas de histéresis de un material, para varios valores de  $H_{max}$ . La línea punteada muestra la saturación de la curva  $B - H$ .

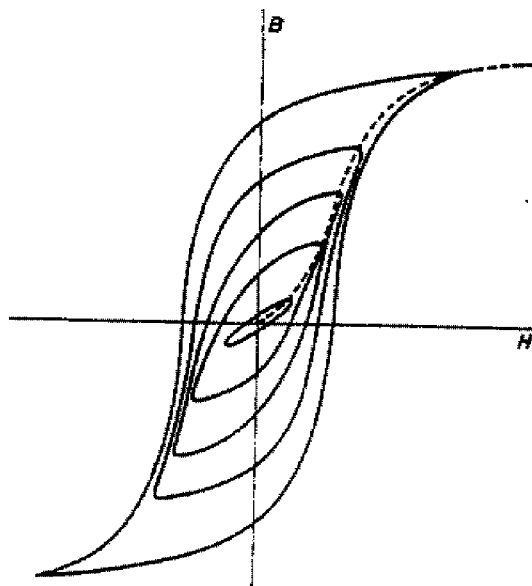


Figura 7.4: Curvas de histéresis para hierro comercial y acero al tungsteno.

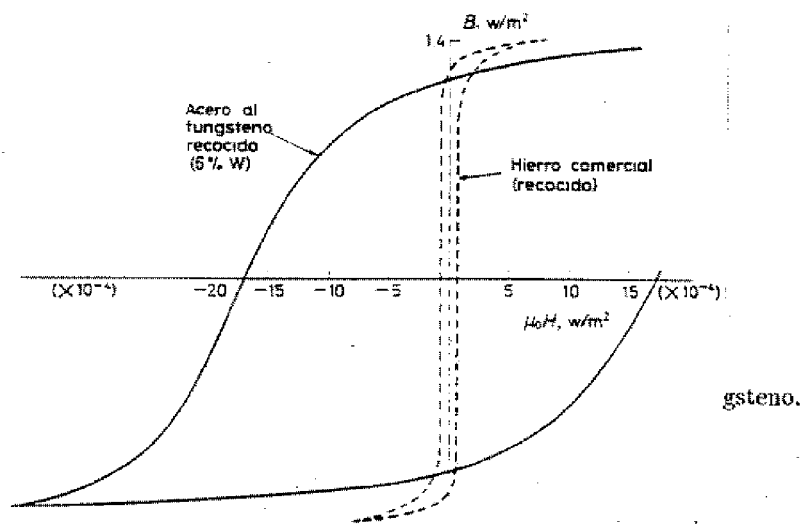
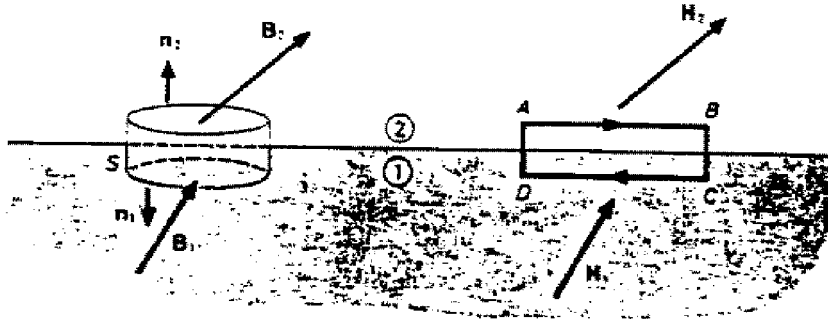


Figura 7.5: Trayectoria  $ABCD$  contenida en dos medios magnéticos distintos, 1 y 2.

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I(c) \quad (7.18)$$

De la primera ecuación se obtiene, como ya se sabe, la continuidad de la componente de  $\vec{B}$  perpendicular a la interfaz; es decir,  $B_n$  es continua. La ecuación para  $\vec{H}$  nos da información nueva. En efecto, usamos la forma integral de la ley de Ampere -recientemente generalizada- y la aplicamos a un circuito infinitesimal  $ABCD$ , en torno a un punto  $P$ , el que está contenido en ambos medios materiales, como se observa en la figura

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{H}_2 \cdot \hat{t} dl + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{H}_1 \cdot (-\hat{t}) dl + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{\ell}. \quad (7.19)$$

En nuestro caso  $I(c) = 0$  (suponemos que no hay corriente superficial  $\vec{J}_S$  en la interfaz), y el vector  $\hat{t}$  es tangente a la interfaz. El resultado es

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = 0 \quad (\vec{J}_S = 0). \quad (7.20)$$

Esto significa que, en ausencia de corrientes superficiales, las componente(s) del campo  $\vec{H}$  tangentes a la interfaz son continuas al atravesar la superficie. Como caso especial, tenemos el de dos medios lineales, con permeabilidad  $\mu_1$  y  $\mu_2$ ; en cuyo caso  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  en cada medio. Supongamos también que la interfaz entre los medios es plana, y coincide con el plano  $xy$ . Las relaciones entre los campos son entonces

$$\left. \begin{aligned} H_{2x} &= H_{1x} \\ H_{2y} &= H_{1y} \end{aligned} \right\} \text{componentes tangenciales}$$

$$B_{2z} = B_{1z} \left. \right\} \text{componente normal}$$

Supongamos - para fijar ideas - que  $H_y = 0$ , entonces

$$H_{2x} = H_{1x} \quad (7.21)$$

$$B_{2z} = B_{1z} \Rightarrow \mu_2 H_{2z} = \mu_1 H_{1z}, \quad (7.22)$$

entonces

$$\frac{H_{2x}}{\mu_2 H_{2z}} = \frac{H_{1x}}{\mu_1 H_{1z}} \Rightarrow \mu_1 \tan \phi_1 = \mu_2 \tan \phi_2,$$

en que  $\phi_1$  es el ángulo que forma  $\vec{H}_1$  con el plano horizontal. De esta manera, el ángulo que forma  $\vec{H}_2$  con el plano horizontal es

$$\tan \phi_2 = \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \tan \phi_1.$$

### 7.5.2 Solenoide recto con núcleo de fierro

Consideramos un solenoide recto, de  $m = N/L$  vueltas por unidad de longitud, por el que circula una corriente  $I$ . Al aplicar la ley circuital de Ampere,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I,$$

se obtiene

$$H = mI.$$

Sin embargo, el campo  $B = \mu H = \mu mI$ , el cual puede ser mucho mayor que el campo en vacío, si el núcleo tiene  $\mu \gg \mu_0$ , lo cual ocurre con los núcleos de fierro (y otros materiales).

Si el núcleo del solenoide es de un material ferromagnético, en un estado magnetizado, con magnetización  $\vec{M}_0$ , no podremos usar la relación  $B = \mu H$ , entonces se debe usar la relación mas general, que da en este caso

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0 \frac{NI}{L} + \mu_0 M.$$

### 7.5.3 Enrollado toroidal

Consideremos ahora un enrollado toroidal, con un corte en el material. Sea  $l$  el largo del toroide, y  $d$  el espesor del corte. Queremos determinar el campo magnético tanto dentro del material ferromagnético, como fuera de él.

Para calcular esto, llamamos  $B_1$  al campo dentro del material, y  $B_2$  al campo en el corte (entrehierro). Tenemos entonces, dentro del material

$$B_1 = \mu_0 H_1 + \mu_0 M,$$

mientras que, en el entrehierro,

$$B_2 = \mu_0 H_2.$$

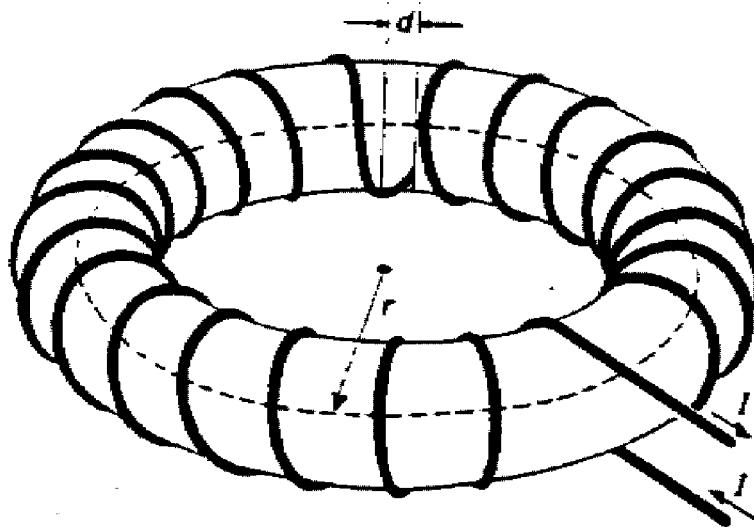
Tambien usamos la relación (ley circuital de Ampere),

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI.$$

Con esto obtenemos las ecuaciones

$$H_1(\ell - d) + H_2 d = NI \quad (7.23)$$

$$\mu_0(H_1 + M) = \mu_0 H_2 \quad (7.24)$$

Figura 7.6: Un enrollado toroidal, con un entrehierro de ancho  $d$ .

| Circuito Eléctrico                                | Circuito Magnético                        |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $fem =$ fuerza electromotriz                      | $fmm =$ fuerza magneto-motriz             |
| $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 = fem$ | $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = fmm$ |
| $I =$ intensidad de corriente eléctrica           | $\Phi =$ flujo magnético                  |
| $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$                 | $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$      |
| ecuación de nodos                                 |                                           |
| $I = I_1 + I_2$                                   | $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$                  |
| $R =$ resistencia eléctrica                       | $R =$ reluctancia                         |
| $R = \int dl / gA$                                | $R = \int dl / \mu A$                     |
| ley de circuitos                                  |                                           |
| $fem = RI$                                        | $fmm = R\Phi$                             |

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene las soluciones:

$$H_1 = \frac{NI}{\ell} - \frac{Md}{\ell} \quad (7.25)$$

$$H_2 = \frac{NI}{\ell} + M\left(1 - \frac{d}{\ell}\right) \quad (7.26)$$

$$B_1 = B_2 = \mu_0 \frac{NI}{\ell} + \mu_0 M\left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \quad (7.27)$$

Esto es un 'circuito magnético', que sigue una analogía muy estrecha con un circuito eléctrico.

# Capítulo 8

## Inducción Electromagnética

Como hemos discutido, las corrientes electricas producen efectos magnéticos. Una corriente eléctrica  $\vec{j}(\vec{r})$  produce un campo magnetico  $\vec{B}(\vec{r})$ . Una pregunta que surge en forma natural es si es posible que algún fenomeno magnético produzca tambien un fenómeno eléctrico. Faraday (1831) descubrió que los efectos buscados aparecen como consecuencia de la variación temporal de los campos magnéticos.

Antes de discutir los resultados de Faraday, definamos el concepto de flujo magnético.

$$\Phi(S) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

es el flujo magnético que atraviesa una superficie  $S$ . El flujo magnetico tiene varias propiedades interesantes,

- El flujo a traves de una superficie cerrada cualquiera es siempre cero, ya que

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) d^3r = 0,$$

en que  $V$  es el volumen encerrado por la superficie  $S$ .

- Debido a lo anterior, el flujo a través de una superficie  $S$  abierta no depende de su forma, sino sólo de la curva que lo limita.
- El hecho anterior puede hacerse explícito, notando que

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}) \\ \Phi(S) &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}, \end{aligned}$$

donde  $C$  es la curva que limita la superficie  $S$ ,  $C = \partial S$ . Por lo tanto, podemos hablar del 'flujo enlazado por un circuito'

Unidades : Campo magnetico =  $Weber/m^{-2} = Tesla$ , lo cual implica que el flujo magnetico se mide en *Weber*.

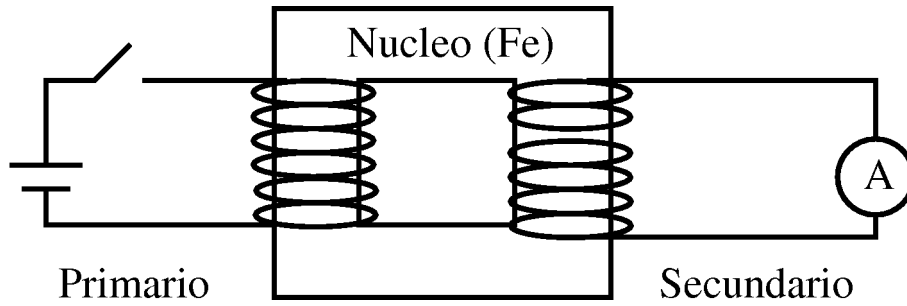


Figura 8.1: experimento de Faraday

## 8.1 Experimento de Faraday

En el experimento de Faraday, al cerrar el interruptor en el circuito 'primario', se produce una corriente en el secundario. Al cabo de un tiempo, la corriente cesa. Si entonces se abre el interruptor, vuelve a aparecer corriente en el secundario, la cual nuevamente cesa al cabo de un tiempo breve. Es importante recalcar que los circuitos primario y secundario se hallan físicamente separados (no hay contacto eléctrico entre ellos).

Los resultados del experimento de Faraday (y muchos otros) se pueden entender en términos de una nueva ley experimental, que se conoce como la ley de Faraday-Lenz:

La variación temporal del flujo magnético enlazado por un circuito, induce en éste una 'fem'  $\epsilon$ :

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.1)$$

Ley de Lenz: El sentido de la 'fem' inducida es tal que siempre tiende a oponerse a la variación del flujo magnético (lo cual explica el signo (-)).

La variación temporal del flujo magnético enlazado por un circuito puede deberse a varias causas, entre las cuales se puede mencionar:

- i) Variación temporal de  $\vec{B}$ ,  $\vec{B} = \vec{B}(r, t)$ .
- ii) El circuito se mueve.
- iii) El circuito se deforma.

Por supuesto, una combinación de las causas anteriores también producirá variación del flujo. Observemos también que la Ley de Faraday es una ley experimental, que no puede deducirse, en su forma general, de ningún otro hecho previamente conocido.

Recordemos ahora que la 'fem' de un circuito  $C$  se define como, en que este campo eléctrico  $\vec{E}$  no es un campo electrostático.

$$\epsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

El flujo magnético es  $\Phi$ ,

$$\Phi(S) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

por lo tanto,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Supongamos que el circuito no se mueve ni se deforma, entonces la variación del flujo  $\Phi$  sólo puede deberse a la variación temporal de  $\vec{B}$ , es decir  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ , luego

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Usando el teorema de Stokes,

$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

Como  $S$  es una superficie cualquiera, se tiene la ley de Faraday en forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

que constituye la generalización de la relación  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  (electrostática). Hasta ahora, conocemos las siguientes ecuaciones para el electromagnetismo (en el vacío):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}, \end{aligned}$$

además, tenemos la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwell se dió cuenta que, en el caso de régimen no permanente, la ley de Ampere y la ecuación de continuidad son contradictorias. Eso significa que se debe modificar la ley de Ampere, pues ley de conservación de carga es considerada como mejor establecida. Para preservar lo más posible la forma de la ley de Ampere, Maxwell propuso una modificación de la forma

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D),$$

donde  $\vec{J}_D$  debe satisfacer la condición

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \vec{J}_D) = 0,$$

luego, por la ecuación de continuidad,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0.$$

Entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Esta ecuación no define completamente a  $\vec{J}_D$ . Se encuentra que la elección más simple posible es

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

satisface todas las condiciones matemáticas y está de acuerdo con toda la evidencia experimental acumulada; por lo tanto la generalización de la ley de Ampere al caso de régimen no permanente es:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

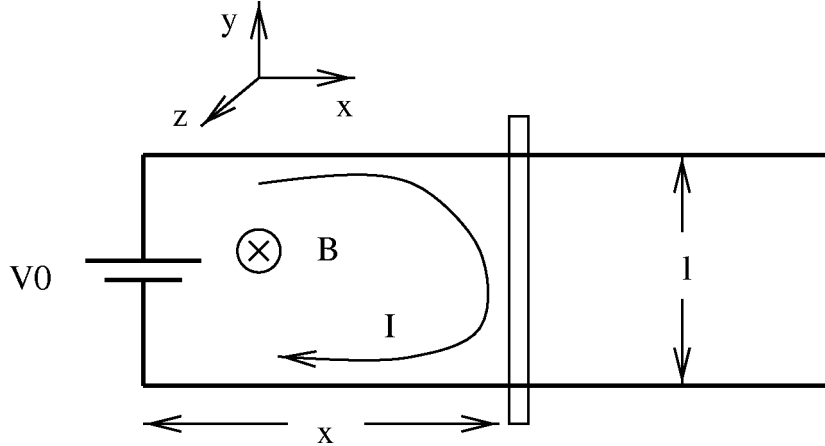
Esta ecuación incluye a la ecuación de continuidad. La cantidad  $\vec{J}_D$  tiene las dimensiones de una corriente eléctrica -densidad- y se le llama 'corriente de desplazamiento' de Maxwell.

## 8.2 Ejemplos

### 8.2.1 Un tren eléctrico

Consideremos dos rieles conductores, de resistencia despreciable, conectados entre sí por una barra ( el tren ) conductora, y separados por una distancia  $l$  . En el otro extremo, se coloca un interruptor y una batería, caracterizada por una f.e.m.  $\epsilon_0$ . Todo el sistema se encuentra inmerso en una zona en que el campo magnético es uniforme,  $\vec{B}_0$ , perpendicular al plano de los rieles.

Figura 8.2: Rieles conductores, unidos por una barra, colocados en un campo magnético  $\vec{B}_0$



En este problema, se conecta el interruptor en  $t = 0$ , comenzando a fluir la corriente, como consecuencia, el campo magnético ejerce una fuerza sobre el circuito, la que hace que se mueva la barra. A su vez, el movimiento de la barra hace aparecer una f.e.m., que modifica la corriente circulante.

Con las coordenadas definidas en la figura, la fuerza sobre la barra (es la que interesa, pues es el elemento que está libre de moverse) es

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = IlB_0(-\hat{j}) \wedge (\hat{k}) = -B_0 l I \hat{i},$$

pues el campo magnético es  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{k}$ . Esto indica que la fuerza es atractiva si la corriente circula en el sentido de los punteros del reloj. Entonces, la ecuación para el movimiento longitudinal de la barra es

$$m \frac{dv}{dt} = -B_0 l I.$$

Por otro lado, la corriente está regida por la ecuación de Kirchoff, que establece que  $fem = RJ$ , en que

$$fem = \epsilon_0 + \epsilon_{inducida} = \epsilon_0 - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Como el flujo es  $\Phi = -B_0 lv$ , la f.e.m. inducida es  $\epsilon = B_0 lv$ , y la ecuación del circuito es

$$\epsilon_0 + B_0 lv = RI.$$

Para resolver las ecuaciones debemos especificar las condiciones iniciales adecuadas. Por ejemplo, consideremos el caso en que el interruptor se cierra en  $t = 0$ , con la barra moviéndose hacia la derecha, con velocidad inicial  $v_0$ , a una distancia  $x_0$  a la derecha de la batería. Las condiciones iniciales son (para  $t = 0$ ),  $I(0) = 0$  y  $v(0) = 0$ . Las ecuaciones se pueden resolver expresando  $v$  en función de  $I$ , a partir de la ecuación de circuito,

$$v = \frac{RI}{B_0 l} - \frac{\epsilon_0}{B_0 l}$$

y reemplazando en  $dv/dt = (R/B_0 l)(dI/dt)$ , se obtiene

$$\frac{dI}{dt} + \frac{(B_0 l)^2}{mR} I = 0.$$

Para expresar la solución, conviene definir el parámetro  $\tau = mR/(B_0 l)^2$ , que tiene las dimensiones de un tiempo, pues la ecuación se expresa como

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = 0,$$

cuya solución es muy conocida, y se expresa en función de una constante de integración  $I_0$  y del parámetro  $\tau$  recién definido,

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}.$$

Con esto, la velocidad del tren es

$$v(t) = \frac{RI_0}{B_0 l} e^{-t/\tau} - \frac{\epsilon_0}{B_0 l},$$

donde

$$v(0) = \frac{RI_0}{B_0 l} - \frac{\epsilon_0}{B_0 l} = v_0.$$

Se concluye que la corriente en  $t = 0$  debe ser

$$I_0 = \frac{B_0 l v_0 - \epsilon_0}{R}.$$

### 8.2.2 Motor y Generador

Consideremos una forma muy simple de generador eléctrico, que consiste en una espira de  $N$  vueltas y radio  $a$ , que está conectada a un circuito como el de la figura, con contactos móviles, que permiten que ella gire libremente. El sistema está colocado en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$ , y se hace girar la espira con velocidad angular constante  $\omega$ .

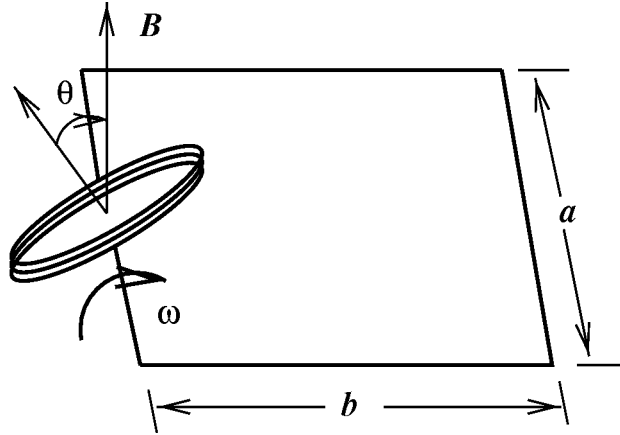
El sistema funciona como un generador de energía eléctrica, pues el flujo enlazado por el circuito depende de la orientación de éste con respecto al campo magnético, y se expresa en la forma

$$\Phi = NB_0 A \cos(\theta),$$

en que  $A = \pi a^2$  es el área de la espira, y  $\theta = \omega t$  es el ángulo que forma el campo magnético con la dirección perpendicular a la espira. De esta manera, el flujo enlazado por el circuito varía, induciendo una f.e.m.  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = NB_0 A \omega \sin(\omega t).$$

Figura 8.3: Un generador de corriente alterna



Por lo tanto, la corriente inducida en el circuito es

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{R} \text{sen}(\omega t),$$

en que hemos usado la constante  $\epsilon_0 = NB_0 A \omega$ , para abreviar las expresiones.

Podemos evaluar la potencia disipada en el circuito, tanto instantánea como en promedio. La potencia instantánea es

$$P(t) = RI^2 = \frac{\epsilon_0^2}{R} \text{sen}^2(\omega t).$$

Definimos la potencia promedio (sobre un ciclo o período,  $T = 2\pi/\omega$ ) como

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = RI_0^2/2 = \epsilon_0^2/2R.$$

Evidentemente, esto nos dice que, para hacer que la espira gire con la velocidad angular  $\omega$ , se debe realizar cierto trabajo en contra del campo magnético inducido, que se refleja en la potencia que hemos calculado. Podemos escribir la ecuación para el movimiento de rotación de la espira, en la forma

$$\frac{dL}{dt} = K \frac{d\omega}{dt} = \tau,$$

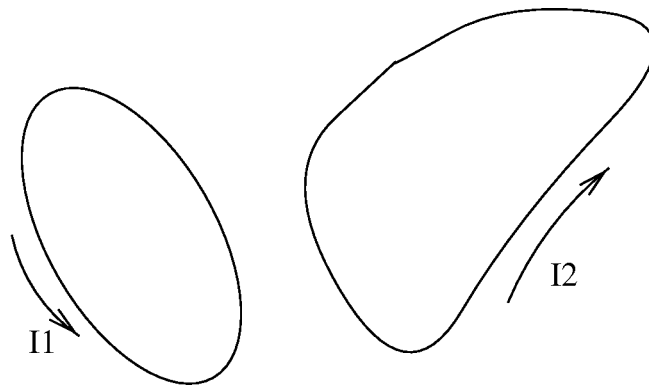
en que  $L$  es el momentum angular en torno al eje de rotación, y  $\tau$  es el torque a lo largo de esa dirección. El torque se opone al movimiento, y se puede calcular con facilidad, con el resultado  $\tau = mB \text{sen}(\theta)$ , en que  $m = NI(t)A$  es el momento dipolar magnético de la espira.

### 8.3 Coeficientes de Autoinducción e Inducción mutua

La idea es que un circuito interactúa con sí mismo y con sus vecinos, como consecuencia directa de la ley de Faraday-Lenz. Los coeficientes de autoinducción e inducción mutua son una medida de esta interacción o 'acoplamiento' inductivo.

Para definir los coeficientes, consideremos dos circuitos  $c_1$  y  $c_2$ , por los cuales circulan corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente -ver dibujo-

Figura 8.4: Coeficientes de autoinducción e inducción mutua.



El flujo magnético total enlazado por el circuito  $c_1$  es

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1,$$

aquí,  $S_1$  es una superficie que tiene borde  $c_1$ . Similarmente,

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2,$$

es el flujo enlazado por el circuito  $c_2$ . El campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  es producido por  $c_1$  y  $c_2$ , es decir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}),$$

por esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} \end{aligned}$$

donde  $\Phi_{ij}$  es el flujo -magnético- enlazado por el circuito  $i$ , debido al campo magnético del circuito  $j$ .

$$\Phi_{ij} = \int_{S_i} \vec{B}_j(r) \cdot d\vec{S}_i.$$

Notemos, además, que  $\vec{B}_1(\vec{r})$  -el campo magnético producido por el circuito  $c_1$ - es proporcional a la corriente  $I_1$  (similarmente para  $\vec{B}_2$ ), luego:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= M_{ij} I_j \\ \Phi_1 &= M_{11} I_1 + M_{12} I_2 \\ \Phi_2 &= M_{21} I_1 + M_{22} I_2; \end{aligned}$$

los coeficientes  $M_{ii}$  se llaman coeficientes de 'autoinducción' y los  $M_{ij}$  (con  $i \neq j$ ) se llaman coeficientes de inducción mutua.

Unidades:  $[M] = \text{Weber/Ampere} = \text{Henry}$

### 8.3.1 Formula de Newmann

Es una expresión para la inductancia mutua de dos circuitos. Se parte de la definición

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_1,$$

lo que se puede escribir en funcion de los potenciales vectoriales,

$$\Phi_{12} = \int_{c_1} \vec{A}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l}_1(\vec{A}_2(\vec{r}))$$

El resultado final es

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}; \quad (8.2)$$

la formula muestra tambien que  $M_{12} = M_{21}$ . Notar que esta formula no se debe usar para calcular inductancias propias.

## 8.4 Ejemplos

### 8.4.1 Autoinductancia de una bobina

Consideramos una bobina o solenoide, de  $N$  vueltas, largo  $l$  y radio  $a$  (el largo  $l \gg a$ ). Determinaremos el coeficiente de autoinducción  $L$  de esta bobina. Recurriremos a la definición, calculando el flujo enlazado por la bobina, debido a su propio campo magnético. El flujo tiene el valor

$$\Phi = NB_0A,$$

en que  $B_0 = \mu_0 NI/l$  es el campo magnético en el interior de la bobina, y  $A = \pi a^2$ . Entonces

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 AI}{l} = LI,$$

de donde obtenemos

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

### 8.4.2 Inductancia mutua de dos embobinados

Consideramos un cilindro de largo  $l$  y radio  $a$ , sobre el que se han colocado dos embobinados, uno de  $N_1$  vueltas, y el otro de  $N_2$  vueltas, y el mismo largo ( $l$ ). Calcularemos el coeficiente de inducción mutua,  $M$ , para lo cual evaluaremos el flujo enlazado por el embobinado  $N_1$ , debido al embobinado  $N_2$ ,

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = N_1 AB_2,$$

en que  $B_2 = \mu_0 N_2 I/l$ , entonces el coeficiente es

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}.$$

Se verifica que  $M^2 = L_1 L_2$ ; en general, se tiene la relacion  $M^2 = k L_1 L_2$  ( $0 < k < 1$ ).

### 8.4.3 Efecto de transformador

Consideremos el problema de un transformador, formado por dos bobinas (inductancias  $L_1$  y  $L_2$ ), acopladas magnéticamente, con coeficiente de inducción mutua  $M$ , como se muestra en la figura siguiente. El circuito primario (lado izquierdo) tiene una fuente de tensión  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , y el secundario tiene una 'carga' resistiva  $R$ . Las ecuaciones para los circuitos primario y secundario son:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) - \frac{d\Phi_1}{dt} &= 0 \\ -\frac{d\Phi_2}{dt} &= RI_2\end{aligned}$$

Para estudiar este problema, consideramos la situación de 'régimen sinusoidal', en que las corrientes son todas sinusoidales (cuando ya ha pasado el efecto transitorio), es decir  $I_1(t) = I_1^0 \cos(\omega t - \phi_1)$  e  $I_2(t) = I_2^0 \cos(\omega t - \phi_2)$ . Resulta más fácil, algebraicamente, trabajar con cantidades complejas  $\hat{I}_1(t)$  y  $\hat{I}_2(t)$ , definidas por

$$\begin{aligned}\hat{I}_1(t) &= \hat{I}_1^0 e^{j\omega t} \\ \hat{I}_2(t) &= \hat{I}_2^0 e^{j\omega t}.\end{aligned}$$

De esta manera, las corrientes reales son simplemente las partes reales de  $\hat{I}_1$  y  $\hat{I}_2$ , además, calcular las derivadas se reemplaza simplemente por la multiplicación por el factor  $j\omega$ . Con esto,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\Phi}_1}{dt} &= j\omega \hat{\Phi}_1 = j\omega(L_1 \hat{I}_1 + M \hat{I}_2) \\ \frac{d\hat{\Phi}_2}{dt} &= j\omega \hat{\Phi}_2 = j\omega(M \hat{I}_1 + L_2 \hat{I}_2).\end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones de los circuitos son:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} - j\omega L_1 \hat{I}_1 - j\omega M \hat{I}_2 &= 0 \\ -j\omega M \hat{I}_1 - j\omega L_2 \hat{I}_2 &= R \hat{I}_2.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación, obtenemos la relación entre las corrientes complejas,

$$\hat{I}_2 = -\frac{j\omega M}{(R + j\omega L_2)} \hat{I}_1.$$

Reemplazando este resultado en la primera ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \frac{(R + j\omega L_2) \hat{\varepsilon}}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R} \\ \hat{I}_2 &= -\frac{j\omega M \hat{\varepsilon}}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R}.\end{aligned}$$

Es interesante calcular el cuociente entre los 'voltajes' en las dos inductancias,  $\hat{V}_{L_1} = j\omega L_1 \hat{I}_1$  y  $\hat{V}_{L_2} = j\omega \hat{I}_2$ ,

$$\frac{\hat{V}_{L_2}}{\hat{V}_{L_1}} = -\frac{j\omega M L_2}{(R + j\omega L_2)L_1}.$$

Si consideramos el caso en que  $R = 0$ , y suponemos que las inductancias corresponden a las dos bobinas (calculado anteriormente), tenemos

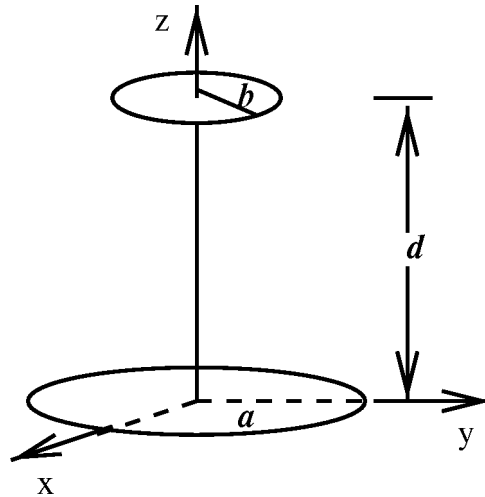
$$\frac{\hat{V}_{L_2}}{\hat{V}_{L_1}} = -\frac{M}{L_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

Esto significa que el voltaje en el secundario es una fracción del número de vueltas. Por ejemplo, si  $N_2/N_1 > 1$ , el voltaje en el secundario será mayor que en primario, lo cual da lugar a su aplicación más conocida, para 'subir' o 'bajar' voltajes. Normalmente, un transformador de una línea de distribución baja el voltaje al nivel adecuado para uso domiciliario.

#### 8.4.4 Inductancia mutua de dos espiras

Considerar dos espiras, de radios  $a$  y  $b$ , dispuestas de manera que sus centros están en el mismo eje (eje  $z$ ), sus planos son perpendiculares al eje  $z$ , y sus centros están a una distancia  $d$ . Si una de las espiras es muy pequeña,  $d \gg a$ , por ejemplo, es posible obtener el coeficiente de autoinducción en forma muy simple.

Figura 8.5: Dos espiras a distancia  $d$ .



El campo magnético, en el eje de la espira mayor (de radio  $a$ ) es

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Como la espira menor es muy pequeña, el campo en cualquier punto de ella debe ser constante, de valor

$$B_z(z = d) = \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + d^2]^{3/2}},$$

luego el flujo enlazado por la espira de radio  $b$ , debido a la otra espira es

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I}{2 [a^2 + d^2]^{3/2}}.$$

Con esto, el coeficiente de inducción mutua es

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2 [a^2 + d^2]^{3/2}}.$$

## 8.5 Inductancia como elemento de circuito

Conectemos una bobina (solenoides) a una fuente de fem continua (ver figura):

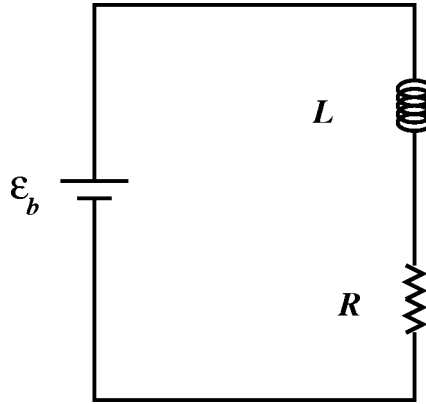


Figura 8.6: bobina conectada a una fuente de fem

Toda bobina real posee resistencia ( $R$ ) e inductancia propia ( $L$ ). Es fácil verificar que una inductancia física puede ser representada como la combinación de una resistencia y una inductancia, ambas ideales. Si por el circuito de la figura fluye una corriente  $I(t)$ , entonces la fem total es

$$fem = \epsilon = \epsilon_{bateria} + \epsilon_{inducida} = \epsilon_b - L \frac{dI}{dt} = RI,$$

luego:

$$\epsilon_b = L \frac{dI}{dt} + RI,$$

de donde se tiene la representación descrita. Notemos que, si el circuito se encontraba abierto ( $I = 0$  en  $t = 0$ ), al cerrar el circuito habrá un periodo 'transiente' y, finalmente se llegará a la corriente

$$I_{final} = \epsilon_b / R.$$

Examinemos como se llega desde  $I = 0$  hasta  $I = I_{final}$ . La ecuación que describe el comportamiento del circuito es

$$\epsilon_b = L \frac{dI}{dt} + RI$$

la solución de esta ecuación es:

$$I(t) = \epsilon_b (1 - e^{-Rt/L})$$

Notemos que  $I(t=0) = 0$ , además

$$\frac{dI}{dt}(t=0) = \frac{\epsilon_b}{L}.$$

La última relación nos dice que el comportamiento de la corriente es gobernado por el valor de  $L$ , en particular, si  $L$  es muy pequeño, la corriente demora un tiempo muy breve en pasar de  $I=0$  a su valor final, el cual es independiente de  $L$ .

Si ahora el circuito se abre en  $t=0$ , cuando la corriente vale  $I = I_0 = \epsilon_b/R$ , entonces

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}.$$

La corriente no cae a cero instantáneamente, sino que demora un tiempo del orden de  $\tau = L/R$ , que es característico del circuito.

## 8.6 Energía Magnética

Consideremos el problema de la bobina real ( $RL$ ) por la que circula una corriente  $I_0 = \epsilon_b/R$ . La energía que se disipa en el circuito desde  $t=0$  hasta que la bobina se 'descarga' completamente es:

$$W = \int_0^\infty RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = LI_0^2/2$$

La energía disipada por el sistema debe haber estado almacenada en él, en otras palabras, una bobina puede ser usada para almacenar energía en forma de una corriente circulando por ella.

$$W_L = LI^2/2 = \Phi I/2 = \Phi^2/2L \quad (\Phi = LI)$$

Se puede establecer una analogía clara entre condensadores e inductancias.

Tabla 8.1: Analogía entre las fórmulas para la energía eléctrica y magnética.

| Condensador                    | Inductancia              |
|--------------------------------|--------------------------|
| $QV/2$                         | $\Phi I/2$               |
| $CV^2/2$                       | $LI^2/2$                 |
| $Q^2/2C$                       | $\Phi^2/2L$              |
| $u_e = \epsilon_0 \vec{E}^2/2$ | $u_m = \vec{B}^2/2\mu_0$ |

Como hemos visto ya, un sistema magnético es capaz de almacenar energía, precisamente aquella energía necesaria para establecer las corrientes que dan lugar al campo magnético  $\vec{B}$ . Es fácil argumentar en favor de una fórmula como  $LI^2/2$  para la energía. Veamos su generalización a más de un circuito. Tomemos  $N=2$  circuitos, con corrientes  $I_1, I_2$ .

- para llegar a la configuración final  $(I_1, I_2)$ , las corrientes deben cambiar desde cero hasta tales valores.

- supongamos que hacemos que las corrientes varíen en la forma:

$$i_1(t) = a(t)I_1 \quad (8.3)$$

$$i_2(t) = a(t)I_2, \quad (8.4)$$

en que  $a(t)$  es una función que varía 'lentamente' desde  $a = 0$  (en  $t = 0$ ) hasta  $a = 1$  (en  $t = \infty$ ).

- al variar  $i_1$  e  $i_2$ , se inducen fem's  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  en ambos circuitos,  $\epsilon_1(t) = -\Phi_1 da/dt$ ,  $\epsilon_2(t) = -\Phi_2 da/dt$ , en que  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  son los valores finales de los flujos. -para hacer crecer la corrientes hay que efectuar trabajo contra las fem inducidas,

$$dW = - \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \epsilon_j(t) i_j(t) dt = \sum_{j=1}^N \Phi_j I_j \int_0^1 da$$

luego,

$$W = \left( \sum_{j=1}^N \Phi_j I_j \right) \int_0^1 da = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Phi_j I_j.$$

También podemos escribir,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{jk} I_k I_j$$

donde se reemplaza el flujo  $\Phi_j$  por

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^N M_{jk} I_k$$

Es posible demostrar que (recordar los coeficientes de potencial, en electrostática):

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 d^3r$$

Esto último puede interpretarse diciendo que 'la energía magnética se almacena en el espacio, con una densidad que depende de la magnitud del campo magnético'. Al igual que en electrostática, consideraciones de energía permiten calcular fuerzas y torques sobre circuitos.

## 8.7 Energía Magnética Estática

Hemos analizado el circuito  $R - L$ , llegando a la conclusión que, cuando circula una corriente  $I$ , la inductancia almacena energía,

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I, \quad (8.5)$$

en que  $\Phi = LI$  es el flujo magnético enlazado por la inductancia. Se satisface la relación de circuitos

$$V + \epsilon_{ind} = RI.$$

Consideramos es trabajo que cuesta mover una carga  $dq$  por el circuito,

$$Vdq = (RI^2dt + d\Phi I)$$

|                    |                 |                                              |
|--------------------|-----------------|----------------------------------------------|
| trabajo<br>externo | efecto<br>joule | trabajo efectuado<br>contra la fem inducida. |
|--------------------|-----------------|----------------------------------------------|

El cambio en la energía del circuito es  $dW_b = d\Phi I$ . Para un conjunto de circuitos acoplados tenemos

$$dW_b = \sum_{k=1}^N I_k d\Phi_k \quad (8.6)$$

$$d\Phi_k = \sum_{l=1}^N M_{kl} dI_l. \quad (8.7)$$

Con esto, podemos calcular el trabajo total  $W_b$ , como el cambio total en la energía de los circuitos, al llevarlos desde la configuración en que todas las corrientes son cero, hasta los valores finales.

Para calcular esto último, podemos considerar que las corrientes varían desde  $I = 0$  hasta su valor final en la forma

$$I(t) = I_k^0 \alpha(t),$$

en que  $\alpha(t)$  es una función conocida de  $t$ . De esta manera tenemos

$$d\Phi_k(t) = \Phi_k^0 d\alpha,$$

en que  $\Phi_k^0$  es el flujo final enlazado por el circuito  $k$ -ésimo. Realizando la integral, tenemos

$$W_b = \int \sum_k I_k^0 \Phi_k^0 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k^0 \Phi_k^0. \quad (8.8)$$

Ahora, puedo ‘olvidarme’ de los índices <sup>0</sup>, y escribimos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k I_k, \quad (8.9)$$

en que hemos identificado  $W_b$  como la energía magnética almacenada por el circuito.

Podemos escribir ahora

$$\Phi_k = \oint_{c_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}_k = \int_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S}_k, \quad (8.10)$$

entonces

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \oint_{c_k} I_k \vec{A} \cdot d\vec{l}_k. \quad (8.11)$$

Recordamos que  $I d\vec{l} \rightarrow \vec{J} d^3r$ , entonces podemos escribir:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} d^3r. \quad (8.12)$$

Podemos realizar una transformación matemática a la expresión anterior, basada en la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}).$$

Observando que el segundo término del lado derecho es precisamente nuestro integrando, llegamos a la conclusión (después de usar el teorema integral de la divergencia)

$$U = \frac{1}{2} \int_{R_3} (\vec{H} \cdot \vec{B}) d^3r. \quad (8.13)$$

Esto permite definir una 'densidad de energía' magnética  $u_m$ ,

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}.$$

## 8.8 Cálculo de Fuerzas y Torques

Consideremos un sistema de corrientes, y calculemos el trabajo mecánico realizado por el sistema cuando se somete al sistema a un desplazamiento  $d\vec{r}$  de una de sus partes. Este trabajo viene dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Por otra parte, este trabajo puede también expresarse como un balance entre la energía entregada por las baterías ( $dW_b$ ) y el cambio de la energía del sistema ( $dU$ ),

$$dW = dW_b - dU.$$

Podemos encontrar una relación entre  $dU$  y  $dW_b$  si consideramos primero el caso en que las corrientes se mantienen constantes durante el desplazamiento virtual. En ese caso,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_k I_k d\Phi_k,$$

mientras que el trabajo  $dW_b$  es

$$dW_b = \sum_k I_k d\Phi_k = 2dU.$$

Entonces  $dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , lo cual permite escribir

$$F_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{I=\text{cte.}} \quad (8.14)$$

Similarmente, si los flujos pueden ser considerados constantes, entonces:

$$F_x = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\Phi} \quad (8.15)$$

## 8.9 Circuitos en régimen transitorio

Hemos estudiado ya los casos

- circuito  $R - C$ .
- circuito  $R - L$ .

### 8.9.1 Circuito $RLC$ (en serie)

Estudiemos un circuito  $RLC$ , en serie, con una fuente de ‘fem’ continua:  $\epsilon_b$ . Para encontrar la ecuación del circuito escribimos la fem total,

$$\epsilon_{total} = \epsilon_b + \epsilon_{inducida} = \epsilon_b - L \frac{dI}{dt} = V_r + V_c,$$

donde  $V_c$  es el voltaje en el condensador;  $V_c = Q/C$  ( $C$  es la capacidad del condensador) y  $V_r$  es la caída de tensión en la resistencia,  $V_r = RI$ , finalmente

$$\epsilon_b = L \frac{dI}{dt} + RI + Q/C, \quad I = dQ/dt.$$

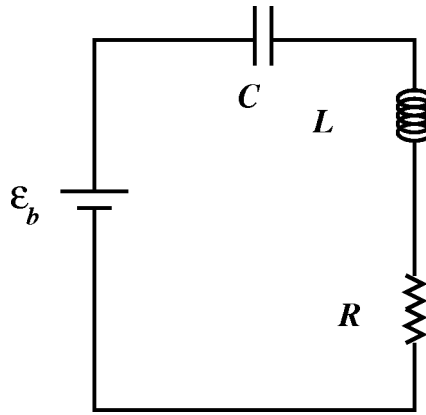


Figura 8.7: Un circuito  $RLC$ , con una f.e.m. continua  $\epsilon_b$ .

Esta ecuación puede resolverse para la corriente o la carga en el condensador. Las condiciones iniciales serán (si el interruptor se cierra en  $t = 0$ ):  $Q(t = 0) = 0$   $I(t = 0) = 0$ . Una solución particular de la ecuación se obtiene con  $Q = \text{constante}$ , lo que da

$$I = 0, \quad Q = C\epsilon_b.$$

Esta es la solución que se obtiene al cabo de un tiempo largo: el condensador se carga y no circula corriente. La solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$Q(t) = Ae^{at},$$

donde  $a$  y  $A$  son constantes, y  $a$  se determina resolviendo la ecuación característica,

$$La^2 + Ra + 1/C = 0,$$

cuya solución es

$$a = -(R/2L) \mp ((R/2L)^2 - 1/LC)^{1/2}.$$

Por lo tanto, hay tres casos, dependiendo del signo del argumento de la raíz cuadrada,

- i)  $(R/2L)^2 > 1/LC \rightarrow \omega = ((R/2L)^2 - 1/LC)^{1/2}$ . La solución que satisface  $I = 0$  en  $t = 0$  es

$$I(t) = 2Ae^{-Rt/2} \text{Senh}(\omega t).$$

$$\text{ii) } (R/2L)^2 < 1/LC \longrightarrow \omega = (1/LC - (R/2L)^2)^{1/2}.$$

$$I(t) = 2iAe^{-Rt/2L} \sin(\omega t).$$

$$\text{iii) } (R/2L)^2 = 1/LC \longrightarrow \omega = 0.$$

$$I(t) = Ate^{-Rt/2L}.$$

Los casos *i* y *iii* son puramente amortiguados, mientras que *ii* es mas interesante.

## 8.10 Fuente de fem alterna: $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t)$

Como siempre hay transiente, esperamos un tiempo suficientemente largo y este desaparece. Cuando se llega a esta situación, solo interesa la solución particular de la ecuación diferencial (régimen 'cuasi-estacionario'). En este caso, si la fuente es sinusoidal, la solución (particular) es también sinusoidal,

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \Phi),$$

en que  $\Phi$  es una constante, llamada la 'fase' (ángulo de fase).

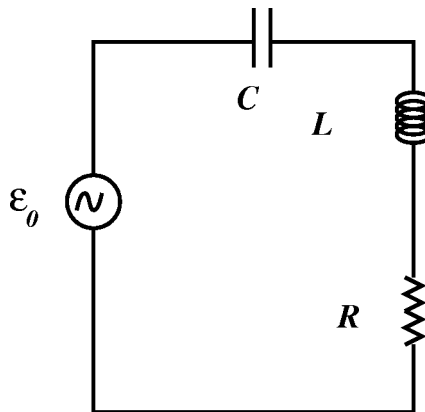


Figura 8.8: Un circuito  $RLC$ , con una f.e.m. continua  $\epsilon_0$ .

La manera más simple de resolver este problema es introducir 'fasores' (es decir, números complejos):

$$\epsilon(t) = \text{Re}(E(t)), \quad E(t) = \epsilon_0 e^{j\omega t},$$

y similarmente para la corriente,

$$i(t) = \text{Re}(I(t)), \quad I(t) = I_0 e^{j\omega t}.$$

Con esto tenemos las relaciones

$$V_L = L di/dt = \text{Re}(L dI/dt) = \text{Re}(j\omega LI)$$

$$V_R = \text{Re}(RI)$$

$$V_C = \text{Re}((1/j\omega C)I)$$

luego,

$$E(t) = (R + j(\omega L - 1/\omega C))I = Z(\omega)I,$$

permite definir la impedancia compleja  $Z(\omega)$ ,

$$Z(\omega) = R + j(X_C + X_L).$$

De esta forma,

- $Z_R = R$ ,
- $Z_L = jX_L$ , en que  $X_L = \omega L$ .
- $Z_C = jX_C$ , en que  $X_C = -1/\omega C$ .

Las impedancias se conectan igual que las resistencias. Para nuestro problema,

$$I(t) = (\epsilon_0/Z(\omega))e^{j\omega t},$$

luego, escribiendo  $Z(\omega) = |Z(\omega)|e^{j\Phi}$ , tenemos

$$I(t) = (\epsilon_0/|Z(\omega)|)e^{j(\omega t - \Phi)}.$$

La corriente real es  $i(t) = \text{Re}(I(t))$ ,

$$i(t) = \text{Re}(I(t)) = (\epsilon_0/|Z(\omega)|) \cos(\omega t - \Phi),$$

en que el angulo de fase es  $\text{tg}(\Phi) = (\omega L - 1/\omega C)/R$ , y la magnitud de  $Z$  es

$$|Z(\omega)| = (R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)^{1/2}.$$

## 8.11 Potencia

Es la velocidad a la que se realiza trabajo. La potencia instantánea es:

$$P(t) = V(t)i(t).$$

La potencia entregada por la bateria es (ejemplo del circuito  $RLC$ -serie)

$$P(t) = (\epsilon_0^2/|Z(\omega)|) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \Phi).$$

La cantidad de interes practico, en aplicaciones a circuitos de corriente alterna, es la potencia promedio:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt,$$

en que  $T = 2\pi/\omega$  es el periodo de oscilacion de la fuente externa de ‘fem’. Haciendo el calculo se tiene:

$$\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0^2 \cos(\Phi)}{2|Z(\omega)|} = \frac{|Z(\omega)|i_0^2 \cos(\Phi)}{2}.$$

Utilizando el hecho que  $i_0 = \epsilon_0/|Z(\omega)|$  es la amplitud de la corriente, y que  $\cos(\Phi) = R/|Z|$ , podemos escribir

$$\langle P \rangle = Ri_0^2/2.$$

Esta expresion es identica a la que se obtiene para corriente continua, si se define la corriente ‘efectiva’

$$I_{ef} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}.$$

De igual manera, se define el voltaje ‘efectivo’  $v_{ef} = V_0/\sqrt{2}$ .

# Capítulo 9

## Ondas Electromagnéticas

En este capítulo se discute brevemente acerca de la existencia, propiedades, generación y detección de ondas electromagnéticas.

### 9.1 Ecuaciones de Maxwell

Hemos establecido previamente las ecuaciones del Campo Electromagnético, en las condiciones más generales posibles. Este conjunto de ecuaciones, denominado Ecuaciones de Maxwell, describe todos los fenómenos electromagnéticos, a nivel macroscópico.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (9.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (9.2)$$

Las relaciones generales entre los campos macroscópicos son

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9.3)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (9.4)$$

Para poder resolver las ecuaciones, se debe conocer las relaciones constitutivas, entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ , entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$ , y entre  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$ .

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ ) son:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (9.5)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (9.6)$$

Estas ecuaciones implican la existencia de ‘ondas electromagnéticas’, que se propagan en el vacío con velocidad  $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ . Por el momento, tomemos  $c$  como una definición (es fácil ver que tiene las dimensiones de una velocidad), y tratemos de obtener una ecuación que involucre solamente a  $\vec{E}$ . Para hacer esto último, tomemos el rotor de la ‘ecuación de Faraday’,

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right), \quad (9.7)$$

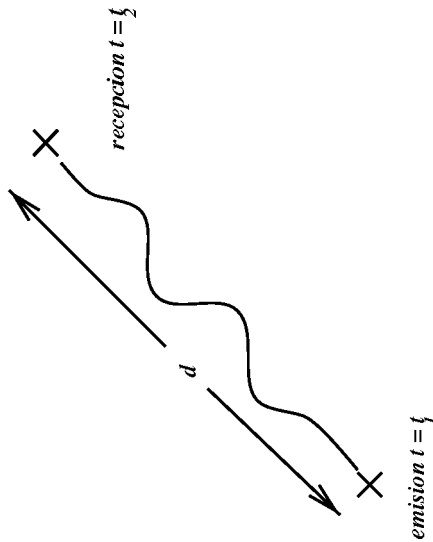


Figura 9.1: El punto de emisión y recepción de una onda están separados por un tiempo  $\delta t = d/c$ , en que  $d$  es la distancia entre los puntos.

lo cual da,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (9.8)$$

Finalmente, se tiene

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0. \quad (9.9)$$

Esta es la llamada ecuación de ondas para el campo eléctrico. El campo magnético  $\vec{B}$  satisface la misma ecuación de ondas.

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0. \quad (9.10)$$

El valor de  $c \approx 299.000$  (km/s), representa la velocidad de propagación de los frentes de onda (en realidad es la 'velocidad de fase').

Hay varias preguntas que uno se puede hacer, y que responderemos a continuación. En primer lugar, ¿Cómo se produce una onda electromagnética?. La respuesta mas simple es que basta tener cargas en movimiento acelerado, o corrientes que varían en el tiempo.

Para dar una descripción matemática del proceso de emisión de una onda electromagnética, deberemos obtener los campos eléctrico y magnético, o bien los potenciales dinámicos,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\Phi}(\vec{r}, t)$ . Observamos, en forma muy simple, que los potenciales anteriores satisfacen las ecuaciones de onda siguientes:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = -\mu_0 \vec{J} \quad (9.11)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\rho/\epsilon_0. \quad (9.12)$$

Recordamos que el potencial estatico  $\vec{A}(\vec{r})$  satisface

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9.13)$$

Como éste potencial satisface una ecuación diferencial similar a la ecuación de ondas, suponemos que la forma del potencial es tambien similar. Hay una importante diferencia, la que ilustramos en la figura, pues cuando se detecta una onda en el punto  $\vec{r}$ , en el instante  $t$ , ésta fué emitida en el instante anterior  $t'$ , en un punto  $\vec{r}'$ , tal que  $t - t' = d/c$ , en que  $d$  es la distancia entre los puntos de emisión y recepción. Se dice entonces que el potencial es retardado. De esta forma, escribimos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9.14)$$

en que  $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ .

Hemos visto que, en las zonas sin cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell conducen a las ecuaciones de ondas para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En las zonas en que existen cargas y corrientes, es mejor buscar las ecuaciones para los potenciales. Tomemos primero el potencial magnético  $\vec{A}$ , y reemplazamos en la ley de Faraday, obteniendo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = 0 \quad (9.15)$$

Deeducimos entonces que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}. \quad (9.16)$$

Tomamos ahora la ecuación para el campo  $\vec{H}$ , y obtenemos

$$\frac{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}}{\mu} = \vec{J} - \epsilon(\vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}). \quad (9.17)$$

Tenemos entonces la siguiente ecuación para el potencial  $\vec{A}$ ,

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi). \quad (9.18)$$

Se impone usualmente la llamada condición de Lorentz, que establece que la cantidad entre paréntesis en al lado derecho de la ecuación anterior se anula idénticamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0. \quad (9.19)$$

Con esto, el potencial  $\vec{A}$ , satisface la ecuación de ondas clásica, con fuentes, que escribimos anteriormente. Reemplazando en la ley de Gauss, se obtiene tambien la ecuación de ondas para el potencial  $\Phi$ . Hay que hacer notar que, como se dijo ya en magnetostatica, existe una ambigüedad en la definición del potencial  $\vec{A}$ , que permite imponer una condición de 'gauge' como la condición de Lorentz.

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (9.20)$$

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Phi = -\rho/\epsilon. \quad (9.21)$$

## 9.2 Flujo de Energía Electromagnética

Recordemos que anteriormente se definió las densidades de energía

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \& \quad u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

¿Es posible hablar de energía electromagnética?: Es natural imaginar que la cantidad  $u$  es un buen candidato a 'densidad de energía electromagnética',

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (9.22)$$

Para ver que esta cantidad tiene propiedades adecuadas, calculemos la variación de  $u$ , con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right) \quad (9.23)$$

Reemplazando las ecuaciones de Maxwell, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{J}) - (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} + \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right). \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{J} \cdot \vec{E} \right). \quad (9.25)$$

Obtenemos entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \frac{1}{2} \vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (9.26)$$

de donde se concluye que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (9.27)$$

Esta ecuación constituye el balance de energía electromagnética, pues relaciona la variación temporal de  $u$  con el flujo del vector de Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ , y con las fuentes de ésta energía (el término  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ ).

## 9.3 Ondas Planas Monocromáticas

La ecuación de ondas tiene soluciones de la forma de 'ondas que se desplazan sin cambiar de forma'. Consideremos primero el caso unidimensional, para una función  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0. \quad (9.28)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (9.29)$$

en que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones arbitrarias -por el momento- de  $x$  y  $t$ , y se relacionan con las condiciones iniciales y de borde del problema.

El caso tridimensional es mucho mas rico en soluciones, por lo cual sólo estudiaremos algunas de las más importantes. Si consideramos una onda que se mueve en la dirección de  $\hat{n}$ ,  $\xi = \vec{r} \cdot \hat{n}$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0. \quad (9.30)$$

Es fácil verificar que existen soluciones de la forma

$$\phi(\vec{r}, t) = f(\xi - ct) + g(\xi + ct), \quad (9.31)$$

llamadas 'ondas planas', pues ((a  $t = cte.$ ) el argumento permanece constante para todos los puntos del plano  $\xi = \vec{r} \cdot \hat{n} = cte.$  perpendicular a  $\hat{n}$ . En el caso de los vectores de campo  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , las ondas planas son de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o f(\vec{r} \cdot \hat{n} \pm ct). \quad (9.32)$$

Una onda plana sinusoidal, se escribe en la forma exponencial

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.33)$$

en que  $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  es la 'fase' de la onda. Si comparamos la fase  $\phi$  con la forma anterior de la onda plana, vemos que se debe satisfacer

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k(\hat{n} \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k}t), \quad (9.34)$$

lo que implica las relaciones

- La frecuencia angular  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ , en que  $T$  es el período y  $\nu$  la frecuencia.
- El vector de onda  $\vec{k} = k\hat{n}$ , es inversamente proporcional a la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ .
- La velocidad (de fase) de la onda,  $v_\phi = \omega/k = \lambda\nu$ .

Se puede escribir, en forma equivalente, ( $\xi = \hat{n} \cdot \vec{r}$ )

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k(\xi - ct) = 2\pi(\frac{\xi}{\lambda} - \nu t) = etc. \quad (9.35)$$

En forma alternativa a las exponenciales, se puede tratar todo íntegramente con funciones reales, combinaciones de senos y cosenos. El tratamiento es completamente equivalente, pero los cálculos son, generalmente, bastante mas engorrosos, por lo cual nosotros preferiremos la representación compleja (llamada tambien representación 'fasorial'). De esta forma, escribiremos los campos complejos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{B}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (9.36)$$

Veremos que los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{k}$  no son cualesquiera, sino que estan relacionados como se observa en la figura; esto es, forman un trío ortogonal. En efecto; en un medio lineal (con  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_o = 0 \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \\
\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= i\vec{k} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \omega \vec{B}_0 = \vec{k} \wedge \vec{E}_0
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Por esta razón se dice que las ondas electromagnéticas son 'transversales'; esto es  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son  $\perp$  a la dirección de propagación ( $\vec{k}$ )

$$\vec{B}_0 = \left(\frac{k}{\omega}\right) \hat{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{v} \hat{n} \wedge \vec{E}. \tag{9.39}$$

La velocidad de propagación  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , reservamos  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  para la velocidad de la luz en el vacío. Definimos el índice de refracción',  $n$ , como el cuociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio material,

$$n := \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}. \tag{9.40}$$

La última relación se sigue del hecho que, para todos los materiales no ferromagnéticos se tiene  $\mu \approx \mu_0$ . Además, se tiene que  $n \geq 1$ .

## 9.4 Leyes de Reflexión y Refracción

Consideramos una onda plana, monocromática, que incide sobre una superficie plana, que es la interfaz entre dos medios dieléctricos. Esta onda se caracteriza por el vector de onda  $\vec{k}_i$ . Llamamos 'plano de incidencia' al plano generado por el vector  $\vec{k}_1$ , y el vector normal a la interfaz,  $\hat{n} = \hat{k}$ . De acuerdo a esta geometría, los vectores de campo se descomponen en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_1^0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_2^0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E}_3 &= \vec{E}_3^0 e^{i(\vec{k}_3 \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{E}_1^0 &= E_1^0 (\cos\theta_1 \hat{i} - \sin\theta_1 \hat{k}) \\ \vec{E}_2^0 &= E_2^0 (\cos\theta_2 \hat{i} + \sin\theta_2 \hat{k}) \\ \vec{E}_3^0 &= E_3^0 (\cos\theta_3 \hat{i} - \sin\theta_3 \hat{k}) \end{aligned} \tag{9.41}$$

Los vectores de onda, a su vez, están dados por

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{v_1} (\hat{i} \sin\theta_1 + \cos\theta_1 \hat{k}) \tag{9.42}$$

$$\vec{k}_2 = \frac{\omega}{v_1} (\hat{i} \sin\theta_2 - \cos\theta_2 \hat{k}) \tag{9.43}$$

$$\vec{k}_3 = \frac{\omega}{v_2} (\hat{i} \sin\theta_3 + \cos\theta_3 \hat{k}). \tag{9.44}$$

Observamos también que

$$k_1 = \left(\frac{\omega}{c}\right) n_1 \quad \& \quad k_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right) n_2$$

La condiciones de borde, en  $z = 0$  ( $\forall(x, y)$ ) son:

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} & E_{1t} &= E_{2t} (*) \\ H_{1t} &= H_{2t} & D_{1n} &= D_{2n}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Usamos ahora estas condiciones para obtener relaciones entre las amplitudes y las fases de las ondas incidente, reflejada y transmitida. Partimos usando la ecuación (\*), la cual, cuando se escribe para  $z = 0$  nos da

$$(*) E_1^0 \cos \theta_1 e^{i(k_1 x \sin \theta_1 - \omega t)} + E_2^0 \cos \theta_2 e^{i(k_1 x \sin \theta_2 - \omega t)} = E_3^0 \cos \theta_3 e^{i(k_2 x \sin \theta_3 - \omega t)}$$

La igualdad anterior sólo puede ser satisfecha, para todo valor de  $x$  (y de  $y$ ), si se tiene las igualdades

$$k_1 \sin \theta_1 = k_1 \sin \theta_2 = k_3 \sin \theta_3, \quad (9.46)$$

es decir,

$$\theta_1 = \theta_2, \quad (9.47)$$

que se conoce como 'Ley de Reflexion', y

$$n_1 \sin \theta_2 = n_2 \sin \theta_3, \quad (9.48)$$

conocida como 'Ley de Snell' de la refracción. Estas dos relaciones, junto con el hecho que una onda viaja en línea recta en un medio homogéneo, constituyen el fundamento de la óptica geométrica. Tenemos, además la relación entre las amplitudes

$$E_1^0 \cos \theta_1 + E_2^0 \cos \theta_2 = E_3^0 \cos \theta_3 \quad (9.49)$$

Si imponemos ahora  $D_{1n} = D_{2n}$ , obtenemos:

$$-\epsilon_1 \sin \theta_1 \epsilon_1^0 + \epsilon_1 \sin \theta_1 E_2 = -\epsilon_2 \sin \theta_3 E_3 \quad (9.50)$$

Notemos que las otras dos condiciones de borde no aportan, en este caso ninguna información adicional. La solución de estas ecuaciones da

$$\frac{E_3^0}{E_1^0} = \frac{2\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3}. \quad (9.51)$$

$$\frac{E_2^0}{E_1^0} = \frac{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}{\epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3}. \quad (9.52)$$

Estas relaciones se conocen como 'ecuaciones de Fresnel', y expresan las relaciones entre las amplitudes de los campos eléctricos de las ondas incidente, reflejada y transmitida.

## 9.5 Ondas Planas en Medios Conductores

Consideramos brevemente el problema de propagación de una onda en un medio conductor homogéneo. Las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho. \end{aligned}$$

deben usarse en conjunto con las relaciones 'constitutivas', de un conductor  $\vec{J} = g\vec{E}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ , y  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ .

Tomemos una onda monocromática, de la forma  $\vec{E} = \vec{E}(r)e^{i\omega t}$ , etc. Entonces la parte espacial de la onda satisface las relaciones

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu(g + i\omega\epsilon)\vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -i\omega\vec{B} \end{cases}$$

Una onda que se mueve en la dirección  $z$ , satisface

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -g\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (9.53)$$

que se reduce a la expresion mas simple (tomando  $\vec{E} = E(z)\hat{i}$ )

$$\frac{d^2}{dz^2}E + (\omega^2\epsilon\mu + i\omega g\mu)E = 0. \quad (9.54)$$

Podemos escribir entonces

$$E = e^{i(\omega t - \gamma z)} \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \omega^2\epsilon\mu + i\omega g\mu. \quad (9.55)$$

$$\gamma^2 = |\gamma^2|e^{i\delta} \begin{cases} |\gamma^2| &= [(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\omega g\mu)^2]^{1/2} \\ tg\delta &= \omega g\mu/(\omega^2\epsilon\mu) = g/(\omega\epsilon) \end{cases}$$

Tambien se puede separar las partes real e imaginaria de  $\gamma$ ,

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (9.56)$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\epsilon}\right)^2} \right) \quad (9.57)$$

$$\beta = \omega g\mu/2\alpha. \quad (9.58)$$

De esta manera,  $E$  se puede escribir como una onda sinusoidal, que viaja y se atenúa exponencialmente en la dirección  $z$ ,

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z}. \quad (9.59)$$

A frecuencias bajas,  $\omega \ll g$ , se puede aproximar la fase a  $\pi/2$ , pues

$$tg\delta \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta \rightarrow \pi/2; \quad (9.60)$$

lo cual significa que  $\gamma$  es imaginario puro. La parte imaginaria es entonces

$$\beta \approx \sqrt{\omega g\mu/2} = \frac{1}{d}. \quad (9.61)$$

La cantidad  $d$  se llama 'espesor de piel'. Para  $\nu = 10^{10} Hz$ , por ejemplo, se tiene  $d = 10^{-5}$  (cm).

## 9.6 Radiación de Una Antena Corta

Consideremos una antena tipo dipolo, en que la corriente que circula por la antena es

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q(t) = \frac{I_0}{\omega} \text{sen} \omega t. \quad (9.62)$$

El campo eléctrico es el de un dipolo eléctrico oscilante, en que el momento dipolar es

$$p(t) = q\ell = \left(\frac{I_0 \ell}{\omega}\right) \text{sen} \omega t. \quad (9.63)$$

El potencial retardado  $\Phi$  es

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{p(t') \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (9.64)$$

en que el dipolo se evalúa en el instante retardado  $t' = t - r/c$ . Los campos distantes  $r \gg \ell$  son ( $\omega = ck$ ).

$$\vec{E} \approx \frac{k}{\epsilon_0 C} \ell I_0 \frac{\text{sen} \theta}{r} \text{sen}(kr - \omega t) \hat{\theta} \quad (9.65)$$

$$\vec{H} \approx (k \ell I_0) \frac{\text{sen} \theta}{r} \text{sen}(kr - \omega t) \hat{\phi}. \quad (9.66)$$

Es fundamental observar que estos campos tienden a cero más lentamente que el campo de una carga puntual  $q$ , y consituyen los campos de radiación. Como consecuencia de esto, el flujo de energía que escapa de una esfera de radio arbitrario es siempre finita. El (promedio temporal del) vector de Poynting nos da

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{k^2 (\ell I_0)^2}{2\epsilon c} \frac{\text{sen}^2 \theta}{r^2} \hat{r}. \quad (9.67)$$



# Capítulo 10

## Repaso de Cálculo Vectorial

Este es un repaso de los elementos matemáticos mínimos necesarios para el curso de Electromagnetismo.

### 10.1 Vectores

En matemáticas, los vectores se definen como ciertos entes abstractos, que satisfacen un conjunto de propiedades.

Llamemos  $V$  a un conjunto de entidades (vectores), que denotaremos como  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , etc., y  $C$  a un cuerpo (en el sentido matemático), cuyos elementos llamaremos escalares (con elementos  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc).

- a) Se ha definido la operación de suma de vectores, es decir, para cualquier par de vectores, el resultado de la operación  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ , en que  $\vec{c}$  es un vector.
- b) Se define el producto por un escalar, es decir, para cualquier  $\vec{a}$  que pertenece a  $V$ , la cantidad  $\alpha\vec{a}$  también pertenece a  $V$ .

Al par de conjuntos  $(V, C)$  será un espacio vectorial si se cumplen las siguientes propiedades:

- i) Conmutatividad:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ii) Asociatividad:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- iii) Distributividad:  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- iv) Elemento neutro:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- v) Elemento inverso:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Es claro que la definición dada anteriormente es sumamente general. En la mayoría de las aplicaciones en física, en cambio no encontramos con una definición de vectores que es algo más restringida, por motivos que serán claros en lo que sigue. En efecto, para nuestros propósitos, el espacio vectorial estará constituido por elementos que tienen una representación geométrica en el espacio tridimensional, y que, desde luego, representan cantidades físicas medibles, como vectores de posición, velocidades, fuerzas, campos eléctricos y magnéticos, etc. Por este motivo,

y para establecer la conexión con las definiciones anteriores, nuestro espacio vectorial será el espacio tridimensional  $\mathbf{R}^3$ , en conjunto con el cuerpo de los números reales  $\mathbf{R}$ .

El espacio tridimensional  $\mathbf{R}^3$ , entonces, es un espacio vectorial bajo los números reales, que tiene, además una propiedad fundamental: tiene una métrica; es decir, a los vectores del espacio tridimensional (en adelante, simplemente, del espacio) se les puede asignar una longitud: El espacio físico es un espacio tridimensional con métrica. Esta métrica es, simplemente, la conocida métrica euclídeana, lo cual significa, simplemente, que la longitud de un vector corresponde a nuestra noción elemental de longitud.

## 10.2 Coordenadas Cartesianas

Hemos dicho que el espacio físico es tridimensional. Esto significa que toda base del espacio debe tener exactamente 3 vectores linealmente independientes. Lo más usual, en física, es escoger estos tres vectores de una manera especial: se toman tres vectores mutuamente perpendiculares, de longitud 1. Esta elección garantiza que los vectores elegidos son linealmente independientes, y que las componentes de los vectores tienen una interpretación geométrica que es simple (es decir, de acuerdo con nuestra intuición). En efecto, todo vector  $\vec{a}$  del espacio físico, puede escribirse en la forma:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z},$$

en que los números reales  $(a_x, a_y, a_z)$  son las componentes cartesianas del vector  $\vec{a}$ , y los vectores unitarios  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  forman una base de vectores unitarios. Es costumbre también asignar un orden a los vectores unitarios (el que se ha dado ya). Ocasionalmente, cuando ya se ha establecido una base, basta entonces dar las componentes del vector respecto a dicha base, por lo que se puede entonces escribir:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

De esta manera, la suma de vectores se puede evaluar fácilmente usando la representación de los vectores en sus componentes cartesianas, es decir,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) + (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = (a_x + b_x) \hat{x} + (a_y + b_y) \hat{y} + (a_z + b_z) \hat{z}.$$

Esto significa, naturalmente, que las componentes del vector  $\vec{c}$  son

$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

Desde el punto de vista geométrico, esto corresponde que la suma de vectores satisface la llamada regla del paralelogramo.

## 10.3 Producto Escalar de Vectores

El producto escalar de vectores se puede definir de dos maneras equivalentes, una manera algebraica, y otra geométrica. Comenzaremos con la manera geométrica, que tiene un significado intuitivo.

Tomemos dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , y llamemos  $\alpha$  al ángulo que ellos forman. Entonces, el producto escalar entre dichos vectores es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha),$$

en que  $|\vec{a}|$  y  $|\vec{b}|$  corresponden a las longitudes de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , respectivamente. Naturalmente, debe cumplirse que

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Si usamos la representación cartesiana, se tiene que:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

es decir, se satisface el teorema de Pitágoras, conocido de nuestros estudios de geometría elemental. Indudablemente, la definición del producto escalar de vectores puede usarse para definir el ángulo entre dos vectores,

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

De acuerdo a la definición dada, es fácil ver que el producto escalar de dos vectores puede también definirse usando las componentes cartesianas de los vectores,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

## 10.4 Producto Vectorial

Se acostumbra definir también una segunda clase de producto entre vectores, cuyo resultado es esta vez un vector. Partiremos con la definición geométrica primero, llamemos  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ . El producto  $\vec{c}$  es tal que:

- i) Es perpendicular al plano generado por los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . La dirección es la dada por la regla de la mano derecha.
- ii)  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$ , en que  $\alpha$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Como los vectores unitarios  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  forman un trío ortonormal derecho, se tiene:

$$\begin{array}{lll} \hat{x} \wedge \hat{y} & = \hat{z} & \hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x} & \hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y} \\ \hat{x} \wedge \hat{x} & = \vec{0} & \hat{y} \wedge \hat{y} = \vec{0} & \hat{z} \wedge \hat{z} = \vec{0} \end{array}$$

De esta manera, podemos escribir el producto entre dos vectores cualquiera en la forma

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = b_x \vec{a} \wedge \hat{x} + b_y \vec{a} \wedge \hat{y} + b_z \vec{a} \wedge \hat{z},$$

donde

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \hat{x} &= a_y \hat{y} \wedge \hat{x} + a_z \hat{z} \wedge \hat{x} = -a_y \hat{z} + a_z \hat{y} \\ \vec{a} \wedge \hat{y} &= a_x \hat{x} \wedge \hat{y} + a_z \hat{z} \wedge \hat{y} = a_x \hat{z} - a_z \hat{x} \\ \vec{a} \wedge \hat{z} &= a_x \hat{x} \wedge \hat{z} + a_y \hat{y} \wedge \hat{z} = -a_x \hat{y} + a_y \hat{x}\end{aligned}$$

Juntando todo, tenemos:

$$\begin{aligned}c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x\end{aligned}$$

De acuerdo a las reglas de cálculo de determinantes, es posible reescribir los resultados anteriores en la forma

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Hay algunas combinaciones de productos que son interesantes, y que aparecen con alguna frecuencia en los cálculos, como por ejemplo el llamado triple producto escalar (como ejercicio, demostrar la igualdad que sigue)

$$D = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c}).$$

Finalmente, el triple producto vectorial aparece tambien con frecuencia demostrar la igualdad que sigue)

$$\vec{D} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Para finalizar, indiquemos que la diferencia entre el punto de vista matemático y físico respecto a los vectores consiste en que, en física usamos una definición algo más restringida, pues los vectores que se consideran tienen una medida (euclídea). Para los vectores del espacio, entonces, existe siempre una cantidad que es invariante bajo rotaciones, que es la longitud del vector. También, y muy importante, las ecuaciones físicas que escribimos son invariantes bajo este grupo de rotaciones; dicho en otras palabras, una igualdad entre vectores es independiente del sistema de coordenadas utilizadas.

## 10.5 Otros Sistemas de Coordenadas

Junto a las coordenadas cartesianas, es de gran importancia poder utilizar coordenadas que sean las más adecuadas para el problema que se desea estudiar. La conveniencia de un tipo de coordenadas sobre otro viene dictada, naturalmente, por la geometría del problema.

Consideramos que nuestro sistema de coordenadas fundamental son las coordenadas cartesianas, por lo cual, cualquier otro sistema lo definiremos por sus relaciones con éste. Existen

varios sistemas que son convenientes para distintas aplicaciones, siendo los sistemas esféricos y cilíndricos los más utilizados por nosotros (hay muchos otros, que no mencionaremos)

### 10.5.1 Coordenadas Cilíndricas

Se definen mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= r\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) \\ z &= z.\end{aligned}$$

Las relaciones inversas son

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan(y/x) \\ z &= z\end{aligned}$$

El significado geométrico de estas coordenadas es simple, las superficies de radio constante,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  son cilindros cuyo eje coincide con el eje  $z$ ; las superficies de ángulo  $\phi$  constante, son planos que cortan el eje  $z$ ; y las superficies de  $z$  constante son planos perpendiculares al eje  $z$  (paralelos al plano  $xy$ ).

La distancia entre dos puntos muy próximos en el espacio,  $dl$ , se puede calcular a partir de la definición

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

en que

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial x}{\partial z}dz = \cos(\phi)dr - r\sin(\phi)d\phi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial y}{\partial z}dz = \sin(\phi)dr + r\cos(\phi)d\phi \\ dz &= dz\end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene

$$dl^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2$$

Geométricamente, esto significa que, dos puntos separados radialmente por una diferencia de coordenadas  $dr$  están a una distancia  $dr$ ; si las coordenadas difieren sólo en un ángulo  $d\phi$ , la distancia es  $rd\phi$ ; mientras que si las coordenadas difieren sólo en  $dz$  la distancia entre ellos es  $dz$ .

De acuerdo a lo anterior, el elemento de volumen, en coordenadas cilíndricas se puede calcular como

$$d^3r = (dr)(rd\phi)(dz) = r dr d\phi dz.$$

Respecto al elemento escalar de área sobre un manto cilíndrico de radio  $R$ , éste se calcula multiplicando las longitudes de los desplazamientos sobre la superficie correspondiente, es decir

$$dS_R = R d\phi dz,$$

mientras que el elemento de área sobre un plano  $z = cte$ , será

$$dS_z = r dr d\phi.$$

### 10.5.2 Coordenadas Esféricas

Las coordenadas esféricas se definen de acuerdo a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned}$$

Las relaciones inversas son:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg}(\phi) &= \frac{y}{x} \\ \cos(\theta) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r} \end{aligned}$$

Geoméricamente, los ángulos  $(\theta, \phi)$  de las coordenadas esféricas corresponden casi exactamente a las coordenadas de latitud y longitud definidas sobre la superficie de la Tierra.

El elemento de longitud se puede calcular de la misma manera que se hizo para el caso de las coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \\ &= \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) dr + r \cos(\theta) \cos(\phi) d\theta - r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) d\phi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \\ &= \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) dr + r \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) d\theta + r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) d\phi \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi \\ &= \cos(\theta) dr - r \operatorname{sen}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

De esta manera, el elemento de longitud se expresa como

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \operatorname{sen}(\theta))^2 d\phi^2$$

Con esto, el elemento de volumen se puede expresar como

$$d^3r = r^2 dr \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi.$$

El elemento de área (escalar), sobre una superficie de esférica de radio  $R$  será entonces

$$dS_R = r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi.$$

## 10.6 Campos Escalares y Vectoriales

Un campo escalar corresponde a una magnitud física que requiere sólo de un número para su caracterización. Esto puede corresponder, por ejemplo, a la distribución de temperaturas dentro de un cuerpo, a las presiones dentro de un fluido, o a un potencial electrostático. Un campo vectorial, en cambio, corresponde a una magnitud física que requiere de varios números para su descripción, como puede ser un campo de fuerzas gravitacionales o eléctricas.

Matemáticamente, un campo escalar es una función  $\Phi(\vec{r})$ , escalar, cuyo valor depende del punto del espacio en que se considere, y que escribimos en la forma

$$\Phi = \Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z),$$

en que  $\vec{r}$  es un vector que representa la posición del un punto de observación en el espacio, de coordenadas (cartesianas)  $(x, y, z)$ .

Recordamos la noción de superficie equipotencial, de valor  $\Phi_0$ , que corresponde al lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencial,

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0.$$

Un ejemplo conocido, y por lo tanto intuitivo, es el de las curvas de nivel en cartografía, que se usa para poder representar la topografía de una región en un mapa bidimensional. En este caso, el campo escalar que corresponde es el campo de alturas  $H(x, y)$ , de una región de la superficie de la tierra, en función de la posición de puntos sobre un plano (proyección). Se trata, evidentemente de un campo escalar en el espacio bidimensional, la altura de un punto está dada por  $z = H(x, y)$ .

### 10.6.1 Gradiente

Consideremos un campo escalar,  $\Phi(x, y, z)$ , y tomemos dos puntos vecinos, de coordenadas  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{dr} = ((x + dx), (y + dy), (z + dz))$ . Calculemos la variación que experimenta el campo entre estos dos puntos vecinos

$$d\Phi = \Phi(\vec{r} + \vec{dr}) - \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

Indudablemente,  $d\Phi$  es un escalar, ya que es la diferencia entre dos escalares, y puede escribirse en la forma:

$$d\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

en que hemos definido el operador diferencial  $\vec{\nabla}$ , cuya acción sobre un campo escalar está dada por

$$\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z}.$$

Como hemos dicho,  $d\Phi$  es un escalar, y  $d\vec{r}$  es un vector, por lo tanto, la cantidad  $\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$  debe ser un vector, pues sólomente el producto de un vector por otro vector puede ser escalar.

El gradiente tiene algunas propiedades interesantes; en primer lugar, se puede demostrar que el gradiente de una función escalar en un punto dado,  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}_0)$ , es perpendicular a la superficie

equipotencial que pasa por dicho punto. En efecto, cuando consideramos desplazamientos sobre la superficie equipotencial, se tiene  $d\Phi = 0$ , por lo tanto

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0,$$

por lo tanto, como  $d\vec{r}$  es paralelo a la superficie, se concluye que  $\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$  es perpendicular a ella.

### 10.6.2 El Gradiente en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

Podemos extender fácilmente la operación de gradiente a otros sistemas de coordenadas. En efecto, tomaremos como idea central que la variación que experimenta un campo escalar es también escalar,

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

#### Coordenadas Cilíndricas

La expresión anterior para  $d\Phi$  es escalar e invariante, esto significa que, si expresamos los vectores  $d\vec{r}$  y  $\vec{\nabla}\Phi$  en coordenadas cilíndricas, tendremos

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z},$$

en que se ha definido

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y}, \\ \hat{\phi} &= -\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}\end{aligned}$$

Con esto, se tiene

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dr(\vec{\nabla}\Phi)_r + r d\phi(\vec{\nabla}\Phi)_\phi + dz(\vec{\nabla}\Phi)_z.$$

Esto se debe comparar con

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz,$$

con lo que se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= (\vec{\nabla}\Phi)_r \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} &= r(\vec{\nabla}\Phi)_\phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\vec{\nabla}\Phi)_z\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\vec{\nabla}\Phi(r, \phi, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}$$

### Coordenadas Esféricas

El caso esférico se trata de la misma manera, considerando

$$\vec{r} = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \hat{y} + r \cos(\theta) \hat{z}.$$

Se puede ver fácilmente entonces que

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \operatorname{sen}(\theta) d\phi \hat{\phi},$$

en que los vectores unitarios son

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \hat{y} - \operatorname{sen}(\theta) \hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\operatorname{sen}(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y} \end{aligned}$$

Si se completa, para las coordenadas esféricas, el procedimiento utilizado para las coordenadas ciliíndricas, se puede llegar al resultado siguiente

$$\vec{\nabla} \Phi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

## 10.7 Integración y Operadores Vectoriales

Como se verá, existe una relación bastante estrecha entre ciertas integrales y algunos operadores diferenciales que se definen a partir del operador gradiente. No tendremos tiempo de tratar esto en detalle, de manera que nos limitaremos a entregar sus definiciones mas conocidas (que no son particularmente interesantes, como se verá).

Comenzaremos discutiendo brevemente algunas ideas de integración. No discutiremos aquí acerca de las técnicas de integración, sino sólo conceptos. Los ejemplos que se desarrollen en clase de Cátedra y ejercicios servirán como recordatorio práctico.

### 10.7.1 Integral de Línea: Circulación

Nos interesa considerar aquí la integral de línea que se define en mecánica en conexión con la idea de trabajo. Matemáticamente, se tiene un campo vectorial  $\vec{F}$ , y se considera la cantidad

$$W_{a-b} = \int_{\Gamma_{a-b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

en que se recorre una trayectoria  $\Gamma$ , desde un punto  $a$  hasta un punto  $b$ .

En general, si se desea evaluar una integral de este tipo en forma directa, se procede a parametrizar la curva, lo que significa que se escribe una expresión (o expresiones) para describir la forma de la curva, en la forma

$$\vec{r} = \vec{r}(u),$$

en que  $u$  es un parámetro tal que  $\vec{r}_a = \vec{r}(u_a)$ , y  $\vec{r}_b = \vec{r}(u_b)$ , con lo cual la integral se convierte en una integral unidimensional usual,

$$W_{a-b} = \int_{\Gamma_{a-b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{u_a}^{u_b} \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} du.$$

En muchas ocasiones, como veremos en el curso, es importante considerar una integral de línea sobre una trayectoria cerrada,

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Como se sabe, los campos para los cuales toda integral sobre una curva cerrada se anula son llamados conservativos, y presentan muchas propiedades interesantes.

### 10.7.2 Integral de Superficie: Flujo

Se considera un campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ , y se define el flujo del campo, a través de una superficie  $S$  como la integral:

$$\Psi(S) = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S},$$

en que  $d\vec{S}$  es el elemento vectorial de superficie, que es un vector perpendicular a la superficie, cuya magnitud es el elemento de área. Si la superficie es cerrada, la convención usual es que el elemento  $d\vec{S}$  apunta hacia afuera del volumen encerrado por la superficie. Evidentemente, el flujo es un escalar.

### 10.7.3 Divergencia

La divergencia de un campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  se puede definir como el límite siguiente:

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en que  $\Delta V$  es un pequeño elemento de volumen en torno a un punto, encerrado por la superficie  $\Delta S$ .

Evidentemente, la divergencia del campo  $\vec{F}$  es un campo escalar, definido en el centro de la región de integración. La definición anterior tiene la virtud de ser independiente de las coordenadas elegidas.

Se puede demostrar que, en coordenadas cartesianas se tiene:

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

mientras que en coordenadas esféricas es:

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) F_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}.$$

### 10.7.4 Teorema de la Divergencia

Este es un teorema muy importante, debido a Gauss, que establece que, bajo condiciones matemáticamente razonables (diferenciabilidad),

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3r = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en que  $V$  es un volumen del espacio (tridimensional), y  $\partial V$  es la superficie que limita a dicho volumen. De acuerdo a la definición que se dió de divergencia, este resultado no resulta demasiado sorprendente.

### 10.7.5 El Rotor

Se puede definir el rotor de un campo vectorial en una forma similar a la definición de divergencia,

$$\text{rot} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \wedge \vec{F}.$$

Usando esta definición, se puede ver que, en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ (\text{rot} \vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ (\text{rot} \vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{aligned}$$

### 10.7.6 Teorema de Stokes

Este teorema establece una relación entre una integral de línea y una de superficie,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en que  $S$  es una superficie abierta, y  $C$  es la curva cerrada que limita a dicha superficie. La dirección de recorrido de la curva  $C$  determina la orientación del vector  $d\vec{S}$ , normal a la superficie.

Nuevamente, dada la definición que se ha dado del operador rotor, este teorema resulta una consecuencia bastante natural.

Dado que todas las operaciones definidas se pueden expresar en términos del operador gradiente, en adelante usaremos esa notación en forma exclusiva, es decir,

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ \text{rot} \vec{F} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

Otra igualdad importante se relaciona con la integral de línea del gradiente de un campo escalar,

$$\int_a^b \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a).$$

### 10.7.7 Otras Propiedades del Gradiente

Es importante recalcar que los operadores gradiente, divergencia y rotor, son operadores diferenciales lineales, lo que tiene importantes consecuencias para las operaciones que se realiza con ellos.

La siguiente es una lista de propiedades importantes, deducibles todas a partir de cálculos directos, aunque laboriosos en algunos casos.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi &= \nabla^2 \Phi \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \Phi &= 0 \\
 \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\
 \vec{\nabla}(\Phi \Psi) &= (\vec{\nabla} \Phi) \Psi + \Phi \vec{\nabla} \Psi \\
 \vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + \vec{G} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \\
 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{F}) &= (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{F} + \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \wedge \vec{G}) &= (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{G}) \cdot \vec{F} \\
 \vec{\nabla} \wedge (\Phi \vec{F}) &= (\vec{\nabla} \Phi) \wedge \vec{F} + \Phi \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \\
 \vec{\nabla} \wedge (\vec{F} \wedge \vec{G}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) \vec{F} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}
 \end{aligned}$$

# Capítulo 11

## Ejercicios y Controles Resueltos

### 11.1 Ejercicio No. 1 24 de Marzo de 1999

#### 11.1.1 Problema # 1

Se tiene un cono, de altura  $h$  y radio basal  $R$ . Se define un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo origen coincide con el apex del cono, y el eje  $z$  coincide con el eje del cono, como se muestra en la figura.

- Determine, por integración directa, el volumen del cono.
- Determine el elemento de área vectorial  $d\vec{S}$  (magnitud y dirección), y el área del manto del cono.

#### 11.1.2 Solución Problema 1.

- El volumen del cono se calcula más fácilmente en coordenadas cilíndricas, con  $r_0 = ztg(\alpha)$ ,

$$V = \int_0^h dz \int_{x^2+y^2 \leq r_0^2} dx dy = \int_0^h dz \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} dr r d\phi.$$

Con esto, se puede integrar primero el ángulo  $\phi$ ,

$$V = \int_0^h dz \int_0^{r_0} 2\pi r dr = \pi \int_0^h r_0^2 dz,$$

reemplazando  $r_0$ ,

$$V = \pi tg^2(\alpha) \int_0^h z^2 dz = \pi tg^2(\alpha) \frac{h^3}{3},$$

que se puede expresar como

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

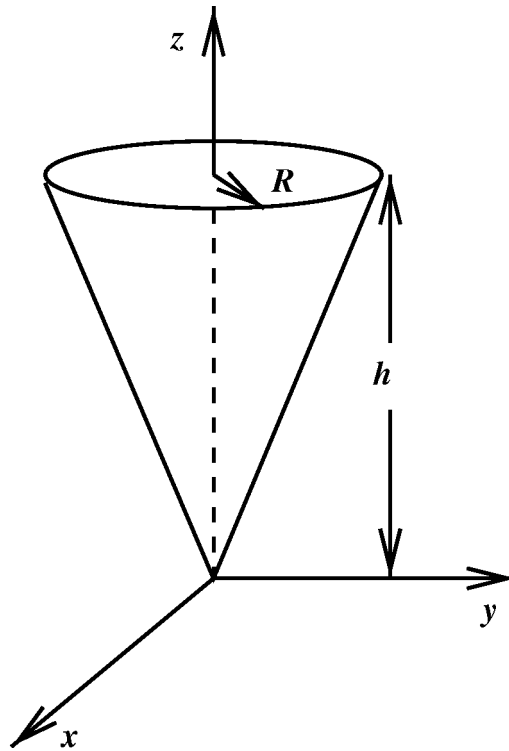


Figura 11.1:

- b) El elemento de área se puede calcular como el producto vectorial de los desplazamientos independientes sobre la superficie, con ángulo azimutal  $\theta = \alpha$ ,

$$d\vec{S} = [r \sin(\alpha) d\phi \hat{\phi}] \wedge [dr \hat{r}].$$

Se obtiene

$$d\vec{S} = r \sin(\alpha) dr d\phi \hat{\theta},$$

donde  $\hat{\theta} = \sin(\alpha)\hat{k} + \cos(\alpha)(\cos(\phi)\hat{i} + \sin(\phi)\hat{j})$ . Ahora podemos calcular el área  $A$  del manto como la integral

$$A = \int dS = \int_0^d r \sin(\alpha) dr \int_0^{2\pi} d\phi = \pi \sin(\alpha) \frac{d^2}{2} = \pi R h.$$

Aquí hemos utilizado  $d = h/\cos(\alpha)$ , y  $R = h \tan(\alpha)$ .

### 11.1.3 Problema # 2

Un plano, que coincide con el plano  $xy$ , tiene carga distribuida superficialmente, con densidad

$$\sigma(x, y) = -\frac{\alpha}{2\pi[d^2 + x^2 + y^2]^{3/2}},$$

en que  $\alpha$  es una constante positiva.

- Determine la carga total contenida en el plano
- Encuentre el campo eléctrico que la distribución anterior produce en un punto de coordenadas  $(0, 0, d)$

### 11.1.4 Solución Problema 2.

a) Se pide determinar la carga total del plano,

$$Q = \int \sigma(x, y) dx dy = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{[d^2 + x^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Para evaluar esta integral usamos coordenadas polares planas  $(r, \phi)$ , entonces

$$Q = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = -\alpha \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{3/2}}.$$

Notamos de inmediato que el integrando se puede escribir como:

$$-\frac{r}{[r^2 + d^2]^{3/2}} = \frac{d}{dr} \frac{1}{[r^2 + d^2]^{1/2}},$$

con esto, la integral es inmediata,

$$-\int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{3/2}} = \left[ \frac{1}{[r^2 + d^2]^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{d}.$$

Entonces, la carga total es

$$Q = -\frac{\alpha}{d}.$$

b) El campo eléctrico en la posición  $0, 0, d$  se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x', y') (z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}) dx' dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

donde  $\vec{r} = d\hat{k}$ , y  $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ . Reemplazando todo esto en la expresión de  $\vec{E}$ , y usando coordenadas polares planas tenemos

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha(d\hat{k} - r\cos(\phi)\hat{i} - r\sin(\phi)\hat{j}) ddr d\phi}{2\pi[r^2 + d^2]^3}.$$

Es inmediato ver que las integrales angulares se anulan,  $\int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi = 0$ , mientras que  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ , con lo cual se tiene

$$\vec{E} = -\frac{\alpha d\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^3},$$

en que el integrando es una derivada exacta, pues

$$\frac{d}{dr} (r^2 + d^2)^{-2} = -4r(r^2 + d^2)^{-3},$$

por lo tanto,

$$\frac{r}{[r^2 + d^2]^3} = -\frac{1}{4} \frac{d}{dr} \frac{1}{[r^2 + d^2]^2},$$

entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^3} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{[r^2 + d^2]^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{4d^4}$$

finalmente, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\frac{\alpha}{16\pi\epsilon_0 d^3} \hat{k}$$

## 11.2 Ejercicio No. 2

### 7 de Abril de 1999

#### 11.2.1 Problema 1

Se tiene una varilla de largo  $2l$ , con carga total  $Q$  distribuída uniformemente, dispuesta a lo largo del eje  $Z$  de las coordenadas escogidas, y cuyo punto medio coincide con el origen de coordenadas.

- Determine el potencial electrostático  $V(z)$ , para puntos de observación ubicados a lo largo del eje  $Z$ .
- Determine también la componente del campo eléctrico a lo largo del eje  $Z$ ,  $E_z(z)$ .

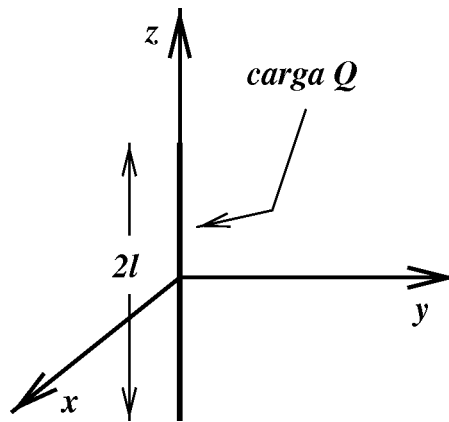


Figura 11.2:

#### 11.2.2 Solución Problema 1.

- Usamos integración directa para calcular el potencial  $V(z)$ ,

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

en que  $dq' = \lambda dz'$ , con  $\lambda = Q/(2l)$ ,  $\vec{r} = z\hat{k}$ , y  $\vec{r}' = z'\hat{k}$ . Tenemos entonces,

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2l} \int_{z'=-l}^{z'=l} \frac{dz'}{|z - z'|}.$$

Consideremos primero el caso en que  $z > l$ , entonces  $|z - z'| = z - z'$ , por lo tanto

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2l} \int_{z'=-l}^{z'=l} \frac{dz'}{(z - z')},$$

la integración es inmediata, y da

$$V(z) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} [\ln(z - z')]_{-l}^l = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} [\ln(z - l) - \ln(z + l)] = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{z + l}{z - l}\right).$$

Notamos que, si  $z < -l$ ,  $V(z)$  es simétrico, entonces podemos escribir, para  $|z| > l$ ,

$$V(z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{|z| + l}{|z| - l}\right).$$

Para  $|z| < l$  ( $-l < z < l$ ) tenemos

$$V(z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \int_{z'=-l}^{z'=l} \frac{dz'}{|z - z'|} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-l}^{z-\delta} \frac{dz'}{z - z'} + \int_{z+\delta}^l \frac{dz'}{z' - z} \right].$$

Las integraciones son elementales, y dan el resultado:

$$V(z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ -[\ln(z - z')]_{-l}^{z-\delta} + [\ln(z' - z)]_{z+\delta}^l \right] = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ -2\ln(\delta) + \ln(l^2 - z^2) \right].$$

Este resultado es obviamente divergente, para  $\delta \rightarrow 0$ , sin embargo el campo eléctrico se puede calcular, como se verá en la parte (b).

- b) Para calcular el campo eléctrico en el eje basta derivar las expresiones obtenidas anteriormente,  $E_z = -dV/dz$ . Considerando en primer lugar el caso  $|z| > l$  tenemos

$$E_z = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{d}{dz} \ln\left(\frac{|z| + l}{|z| - l}\right) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z| + l} - \frac{1}{|z| - l} \right] \text{signo}(z).$$

Reordenando un poco, se puede escribir, para  $|z| > l$ ,

$$E_z = \frac{Q \text{signo}(z)}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - l^2)}.$$

Para  $|z| < l$  usamos la expresion anterior, tomando la derivada antes del límite, con lo cual el término  $-2\ln(\delta)$  no contribuye. El resultado es entonces,

$$E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 l (z^2 - l^2)}.$$

### 11.2.3 Problema 2

Se tiene un conductor esférico, de radio  $a$ , rodeado por una distribución de carga uniforme, concéntrica, de radio  $b$  y densidad  $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ .

- Si el conductor tiene carga total  $Q$ , determine el campo eléctrico y el potencial electrostático en todo el espacio.
- Si el conductor se encuentra a potencial cero (a tierra), encuentre el campo eléctrico y el potencial electrostático en todo el espacio.

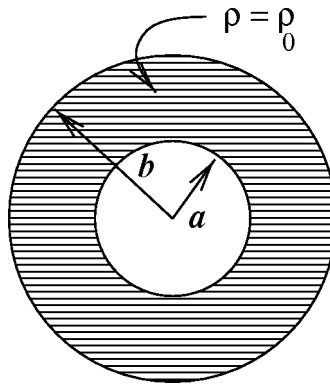


Figura 11.3:

### 11.2.4 Solución Problema 2.

- a) Usaremos el Teorema de Gauss para resolver este problema. Notamos que el problema tiene simetría esférica, con lo cual el campo tiene la forma  $E(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ , en que  $r$  es la distancia del centro de la esfera al punto de observación, y  $\hat{r}$  es el vector unitario radial.

Tomamos una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , concéntrica con las esferas del problema, y tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(S)}{\epsilon_0},$$

con lo cual tenemos

- i) Como la carga encerrada es 0 para  $r < a$ ,  $E = 0$  en dicha región.
- ii) En la región  $a < r < b$  la carga encerrada es

$$Q(S) = Q_0 + \int_0^r 4\pi(r')^2 \rho(r') dr' = Q_0 + 4\pi\rho_0(r^3 - a^3)/3,$$

por lo tanto, el campo eléctrico es

$$E(r) = \frac{Q_0 + 4\pi\rho_0(r^3 - a^3)/3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_0 - 4\pi\rho_0 a^3/3}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}.$$

- iii) Finalmente, para  $r > b$ , la carga encerrada es  $Q(S) = Q_0 + 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3$ , con lo cual obtenemos el campo

$$E(r) = \frac{Q_0 + 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Para obtener el potencial, basta integrar el campo eléctrico. Haremos esto partiendo desde la región exterior,  $r > b$ ,

- i) Claramente, se tiene,

$$V(r) = \frac{Q_0 + 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3}{4\pi\epsilon_0 r},$$

suponiendo que  $V(\infty) = 0$  (lo que anula la constante de integración). Notemos que el potencial en  $r = b^+$  es (usaremos esto más adelante)

$$V(b^+) = \frac{Q_0 + 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3}{4\pi\epsilon_0 b},$$

ii) En la región  $a < r < b$  tenemos

$$V(r) = \frac{Q_0 - 4\pi\rho_0 a^3/3}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + c_1.$$

Para evaluar  $c_1$  usamos la condición de continuidad del potencial en  $r = b$ , es decir, se debe tener  $V(r = b^-) = V(r = b^+)$ , que nos da la relación

$$\frac{Q_0 - 4\pi\rho_0 a^3/3}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + c_1 = \frac{Q_0 + 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

Con esto, la constante  $c_1$  queda determinada,

$$c_1 = \frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}.$$

iii) Finalmente, veamos lo que pasa para en  $r = a$ , el potencial en la superficie del conductor,

$$V(a) = \frac{Q_0 - 4\pi\rho_0 a^3/3}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} + c_1 = \frac{Q_0 - 4\pi\rho_0 a^3/3}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{\rho_0(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0}.$$

## 11.3 Ejercicio No. 3

### 28 de Abril de 1999

#### 11.3.1 Problema 1

Se tiene un condensador plano, con placas de área  $A$ , separadas por la distancia  $d$ . Entre las placas del condensador se coloca un material dieléctrico lineal e isótropo, pero no homogéneo, con una 'constante' dieléctrica que depende de la posición, en la forma  $\epsilon(x) = \epsilon_0 e^{x/a}$ , en que  $a$  es una constante,  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío y  $x$  es la distancia respecto a la placa inferior (ver figura). Suponga que la diferencia de potencial entre las placas es  $V_0$ .

- Determine los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , y las cargas de polarización.
- Determine también la capacidad del condensador y el potencial electrostático  $V(x)$ .

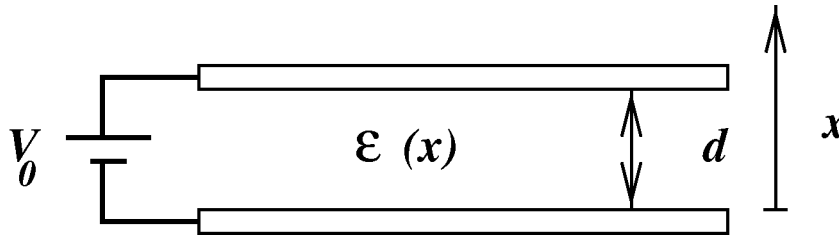


Figura 11.4:

#### 11.3.2 Solución Problema 1

Las ecuaciones de campo son  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$  y  $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$ . La simetría del problema nos dice que podemos suponer que los campos dependen sólo de la coordenada  $x$ , medida respecto a la placa inferior de la figura,  $\vec{D} = D(x)\hat{i}$ ,  $\vec{E} = E(x)\hat{i}$ . Con esto, se cumple automáticamente que  $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$ , mientras que la ecuación  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$  implica  $dD/dx = 0$ , es decir,  $D = \text{cte.}$ . Con esto, tenemos

$$E(x) = \frac{D}{\epsilon(x)} = \frac{D}{\epsilon_0} e^{-x/a},$$

por lo tanto podemos determinar el potencial  $V(x)$ , resolviendo la ecuación

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{D}{\epsilon_0} e^{-x/a},$$

que tiene la solución

$$V(x) = \frac{aD}{\epsilon_0} e^{-x/a} + \text{cte.},$$

en que la constante se determina imponiendo  $V(x=0) = 0$ , lo que nos da

$$\text{cte.} = -\frac{aD}{\epsilon_0}.$$

Finalmente,

$$V(x) = \frac{aD}{\epsilon_0}(e^{-x/a} - 1).$$

El vector de polarización es  $\vec{P} = P(x)\hat{i}$ , que se obtiene de la definición,  $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E}$ , por lo tanto, las cargas de polarización son:

- $\sigma_P(x = d) = \vec{P}(x = d) \cdot \hat{i} = D - \epsilon_0 E(x = d) = -\epsilon_0 \frac{V_0}{a}.$
- $\sigma_P(x = 0) = \vec{P}(x = 0) \cdot -(\hat{i}) = 0.$
- $\rho_P(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(x) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) = \frac{D}{a} e^{-x/a}.$

La capacidad se determina fácilmente de los resultados anteriores, pues la carga en la placa superior es  $\sigma = \vec{D} \cot(-\hat{i}) = -D = Q/A$ , entonces

$$Q = \frac{\epsilon_0 A V_0}{a(1 - e^{-d/a})},$$

y la capacidad es

$$c = \frac{\epsilon_0 A}{a(1 - e^{-d/a})}.$$

### 11.3.3 Problema 2

Se tienen dos condensadores, con capacidades  $c_1$  y  $c_2$ . El condensador  $c_1$  se encuentra cargado con carga  $Q$ , y el otro se encuentra descargado. Se conecta ambos condensadores en paralelo.

- Determine las cargas finales en ambos condensadores.
- Suponga que el condensador  $c_1$  es plano, con placas de área  $A$  y separación  $d$ , y se inserta una placa dieléctrica (espesor  $d$ ) entre las placas de este condensador. Determine las cargas en ambos condensadores, en función de la distancia  $s$  que la placa dieléctrica ha ingresado al condensador.

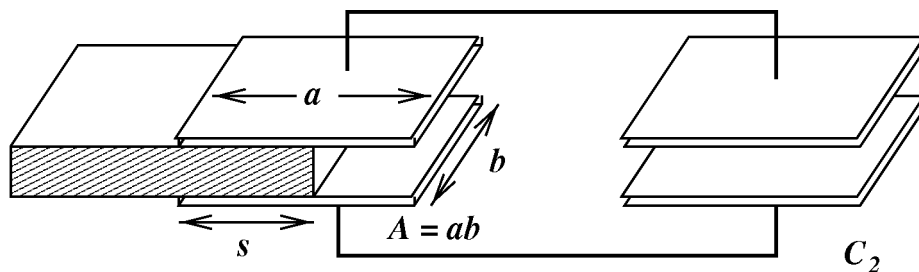


Figura 11.5:

### 11.3.4 Solución Problema 2

- a) La carga  $Q$  se reparte en los dos condensadores, de acuerdo a la condición que ambos se encuentren al mismo potencial,  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ , entonces  $\Delta V_1 = Q_1/c_1$ ,  $\Delta V_2 = Q_2/c_2$ . Además, la carga total no cambia, luego  $Q = Q_1 + Q_2$ . Resolviendo estas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_2 Q / (c_1 + c_2) \\ Q_2 &= c_1 Q / (c_1 + c_2). \end{aligned}$$

- b) Al insertar la pieza de material dieléctrico, la capacidad del condensador  $c_1$  dependerá (en principio) de  $s$ , entonces será  $c_1(s)$ . Podemos considerar que  $c_1(s)$  corresponde a la conexión en paralelo de dos condensadores, uno de capacidad  $c_s = \epsilon s b / d$ , y otro de capacidad  $c'_s = \epsilon_0(a - s)b/d$ , con lo cual tenemos

$$c_1(s) = c_s + c'_s = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0) s b}{d}.$$

Con esto, las cargas se reparten de acuerdo a las expresiones de la parte (a).

## 11.4 Ejercicio No. 4

### 5 de Mayo de 1999

#### 11.4.1 Problema 1

Se tiene un condensador plano, con placas de área  $A$ , separadas por la distancia  $d$ . Suponga que el condensador se carga a la diferencia de potencial  $V_0$ , por medio de una batería, y luego ésta se retira. Enseguida se coloca una placa conductora de espesor  $d$ , entre las placas del condensador como se muestra en la figura. Se pide determinar la energía electrostática, en los casos que se indican:

- Si la placa tiene carga cero.
- Si la placa tiene carga total  $Q$ .

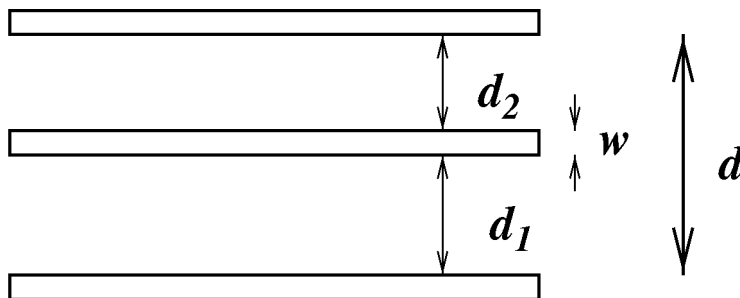


Figura 11.6:

#### 11.4.2 Solución Problema # 1

El condensador adquiere una carga  $Q_0 = cV_0$ , en que  $c = \epsilon_0 A/d$ .

- Al introducir la placa descargada, el sistema corresponde a dos condensadores conectados en serie, de capacidades  $c_1 = \epsilon_0 A/d_1$  y  $c_2 = \epsilon_0 A/d_2$ , con lo cual su capacidad equivalente será  $c'$ , en que

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 A} = \frac{d - w}{\epsilon_0 A},$$

entonces

$$c' = \frac{\epsilon_0 A}{(d - w)}.$$

La carga del condensador no cambia, por lo tanto, su energía es

$$U = \frac{Q_0^2}{2c'} = \frac{\epsilon_0 A(d - w)V_0^2}{2d^2}.$$

- b) Al introducir la placa cargada, el sistema no puede considerarse como un condensador equivalente, por lo cual hay que determinar los campos y densidades de carga. La placa inferior tiene carga total  $-Q_0$ , la placa intermedia tiene carga total  $Q$ , y la placa superior tiene carga total  $Q_0$ . Estas cargas se distribuyen con densidades  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$  y  $\sigma_6$ , respectivamente.

Por conservación de carga se tiene:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 + \sigma_2)A &= Q_0 = \sigma_0 A \\(\sigma_3 + \sigma_4)A &= Q = \sigma A \\(\sigma_5 + \sigma_6)A &= -Q_0 = -\sigma_0 A\end{aligned}$$

Por el teorema de Gauss se tiene:

$$\begin{aligned}(\sigma_2 + \sigma_3) &= 0 \\(\sigma_4 + \sigma_5) &= 0 \\(\sigma_1 + \sigma_6) &= \sigma.\end{aligned}$$

Notamos que la última ecuación no es independiente de las anteriores, de manera que se necesita otra ecuación. Por simetría tenemos

$$\sigma_1 = \sigma_6,$$

con lo que tenemos la solución

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma/2 \\ \sigma_6 &= \sigma/2 \\ \sigma_2 &= \sigma_0 - \sigma/2 \\ \sigma_3 &= -\sigma_0 + \sigma/2 \\ \sigma_4 &= \sigma/2 + \sigma_0 \\ \sigma_5 &= -\sigma_0 - \sigma/2\end{aligned}$$

Necesitamos la diferencia de potencial entre la placa inferior y la placa intermedia,  $\Delta V_1$ , y la placa superior,  $\Delta V_2$ , tenemos

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \sigma_4 d_1 = (\sigma/2 + \sigma_0) d_1 \\ \Delta V_2 &= \Delta V_1 + \sigma_2 d_2 = (\sigma/2 + \sigma_0) d_1 + (-\sigma/2 + \sigma_0) d_2\end{aligned}$$

La energía será entonces,

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V_1 + \frac{1}{2} Q_0 \Delta V_2,$$

### 11.4.3 Problema 2

Un condensador esférico, formado por dos esferas conductoras, de radios  $a$  y  $b$ , se carga a una diferencia de potencial  $V_0$ . Enseguida, se introduce entre las esferas un dieléctrico líquido, hasta llenar la mitad del volumen interior.

- Encuentre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  entre las placas conductoras.
- Determine el cambio en la energía electrostática del sistema, debida a la introducción del dieléctrico.

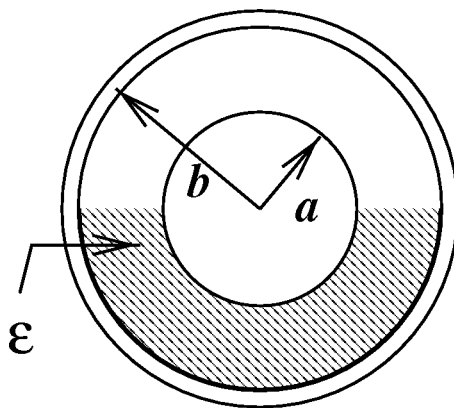


Figura 11.7:

### 11.4.4 Solución Problema # 2

El condensador se carga con una carga  $Q_0 = cV_0$ , en que  $c = 4\pi\epsilon_0 ab/(b - a)$ . Al introducir el dieléctrico, ésta carga permanece constante, pero cambian los campos. Por la simetría del problema el campo eléctrico mantiene su simetría esférica,  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ , en que  $r$  es la distancia al centro de la esfera.

a) El campo  $E(r)$  tiene la forma  $E(r) = \alpha/r^2$ , en que  $\alpha$  es una constante. El vector  $\vec{D}$  tiene la forma  $D_0(r) = E(r)/\epsilon_0$  en la zona con vacío, y  $D_1(r) = E(r)/\epsilon$ , en la zona con dieléctrico. La constante  $\alpha$  se puede determinar usando el teorema de Gauss, pues (tomando una esfera gaussiana de radio  $a < r < b$ )

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi(\epsilon + \epsilon_0)\alpha = Q_0.$$

Con esto,  $\alpha = Q_0/2\pi(\epsilon + \epsilon_0)$ .

b) El potencial es  $V(r) = \alpha/r + cte.$ , y la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \frac{Q_0}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)},$$

con lo cual, la capacidad es

$$c' = 2\pi(\epsilon + \epsilon_0) \frac{ab}{b - a} = \frac{(\epsilon + \epsilon_0)}{2\epsilon_0} c.$$

La energía, en la nueva configuración es  $U' = Q_0^2/(2c')$ , mientras que, en la configuración original es  $U = Q_0^2/(2c)$ , por lo tanto, el cambio en la energía es

$$U' - U = \frac{Q_0^2}{2} \left( \frac{1}{c'} - \frac{1}{c} \right) = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon)}{(\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{Q_0^2}{2c}.$$

## 11.5 Ejercicio No. 5

### 26 de Mayo de 1999

#### 11.5.1 Problema 1

Se tienen dos baterías, de f.e.m.  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  y resistencia interna  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, conectadas en paralelo. Demuestre que estas baterías son equivalentes a una sola batería, de f.e.m.  $\epsilon_0$  y resistencia interna  $r$ , y encuentre los valores de  $\epsilon_0$  y  $r$ .

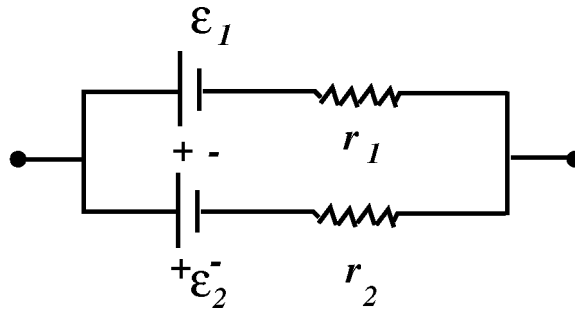


Figura 11.8:

#### 11.5.2 Solución Problema #1

Para demostrar que las dos baterías en paralelo son equivalentes a una sola, agregamos una carga, de resistencia  $R$ , y tenemos un circuito que es simple de resolver. Llamamos  $I_1$  a la corriente que pasa por la batería # 1,  $I_2$  a la corriente que pasa por la batería #2, e  $I$  a la corriente que pasa por la carga, entonces, aplicando las leyes de Kirchhoff tenemos:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I &= 0 \\ \epsilon_1 - RI - R_1 I_1 &= 0 \\ \epsilon_2 - RI - R_2 I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Podemos despejar las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , en función de  $I$ ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(\epsilon_1 - RI)}{R_1} \\ I_2 &= \frac{(\epsilon_2 - RI)}{R_2}. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la corriente  $I$ ,

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{R_1} + \frac{\epsilon_2}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)RI.$$

Llamemos  $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , entonces  $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$ , entonces podemos reorganizar la ecuación anterior en la forma

$$\left(1 + \frac{R}{R_{eq}}\right)I = \left(\frac{\epsilon_1}{R_1} + \frac{\epsilon_2}{R_2}\right),$$

multiplicando por  $R_{eq}$  tenemos:

$$(R + R_{eq})I = \frac{(R_2\epsilon_1 + R_1\epsilon_2)}{(R_1 + R_2)}.$$

Ahora podemos identificar la f.e.m. y la resistencia interna equivalentes,

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{(R_2\epsilon_1 + R_1\epsilon_2)}{(R_1 + R_2)} \\ r &= R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}.\end{aligned}$$

### 11.5.3 Problema 2

Encuentre la corriente que fluye a través de la resistencia  $R_1$  del circuito de la figura, en que las resistencias son  $R_1 = 10(\Omega)$ ,  $R_2 = 20(\Omega)$ ,  $R_3 = 30(\Omega)$  y los potenciales en los puntos (1), (2) y (3) son iguales a  $V_1 = 10$  (V),  $V_2 = 6$  (V), y  $V_3 = 5$  (V).

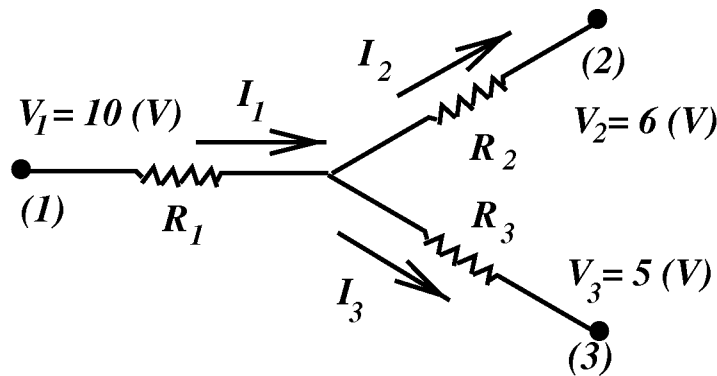


Figura 11.9:

### 11.5.4 Solución Problema #2

Para resolver este problema escribimos las ecuaciones que se obtienen de aplicar la ecuación fundamental de circuitos, para un segmento de circuito,

$$V_b - V_a = \epsilon_a b - RI.$$

Tenemos entonces, como no hay f.e.m. en los tramos en cuestión,

$$\begin{aligned}V_2 - V_1 &= -R_1 I_1 - R_2 I_2 \\ V_3 - V_1 &= -R_3 I_3 - R_1 I_1 \\ V_3 - V_2 &= -R_3 I_3 + R_2 I_2.\end{aligned}$$

Observamos que la última ecuación es la diferencia de las dos primeras, por lo que no entrega información independiente. Las corrientes están relacionadas por

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Despejamos  $I_3$  en función de  $I_1$  e  $I_2$ ,

$$I_3 = I_1 - I_2,$$

y reemplazamos esto en las primeras dos ecuaciones de voltajes (con un cambio de signo global de por medio),

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ V_1 - V_3 &= R_3(I_1 - I_2) + R_1 I_1 = (R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 \end{aligned}$$

Ahora podemos eliminar la corriente  $I_2$ , despejándola de las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(V_1 - V_2)}{R_2} - \frac{R_1 I_1}{R_2} \\ I_2 &= -\frac{(V_1 - V_3)}{R_3} + \frac{(R_1 + R_3)I_1}{R_3}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos:

$$\frac{(V_1 - V_2)}{R_2} - \frac{R_1 I_1}{R_2} = -\frac{(V_1 - V_3)}{R_3} + \frac{(R_1 + R_3)I_1}{R_3},$$

y reordenando:

$$\frac{(V_1 - V_2)}{R_2} + \frac{(V_1 - V_3)}{R_3} = \frac{R_1 I_1}{R_2} + \frac{(R_1 + R_3)I_1}{R_3},$$

multiplicando ahora por  $R_2 R_3$ ,

$$(R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)I_1 = R_3(V_1 - V_2) + R_2(V_1 - V_3),$$

finalmente,

$$I_1 = \frac{(R_3(V_1 - V_2) + R_2(V_1 - V_3))}{(R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)}$$

Usando los valores dados,

$$\begin{aligned} R_3(V_1 - V_2) + R_2(V_1 - V_3) &= 30(10 - 6) + 20(10 - 5) = 220V\Omega \\ R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3 &= 10 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 20 \cdot 30 = 1100\Omega^2 \\ I_1 &= \frac{220}{1100}(A) = 0,2(A) \end{aligned}$$

## 11.6 Ejercicio No. 6

### 9 de Junio de 1999

#### 11.6.1 Problema 1

Se tiene una cinta muy larga, de espesor despreciable y de ancho  $a$ , que lleva una corriente total  $I$ , distribuída uniformemente en su superficie.

- Escriba las expresiones que permiten calcular el campo magnético producido por la cinta.
- Calcule ahora las integrales para las dos componentes no nulas del campo  $\vec{B}$ .

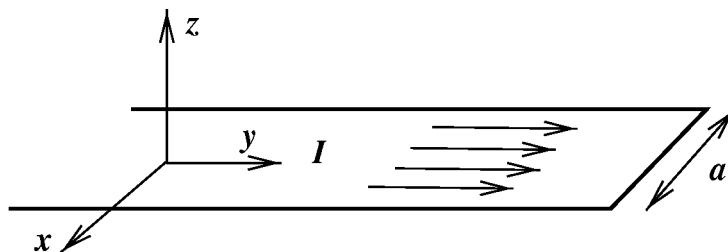


Figura 11.10:

#### 11.6.2 Solución Problema #1

Tratamos el problema como una corriente superficial, en que  $J_S = I/a$ , pues se desprecia el espesor de la cinta. Usamos la definición de campo magnético,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_S \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS',$$

en que la corriente superficial es  $\vec{J}_S = J_S \hat{j}$ , los puntos de la cinta son  $\vec{r}' = (x', y', z')$ , en que  $0 < x' < a$ ,  $-\infty < y' < \infty$ , y  $z' = 0$ ; los puntos del espacio tienen coordenadas  $\vec{r} = (x, y, z)$  cualquiera, y el elemento de área  $dS' = dx' dy'$ . Procedemos a evaluar el integrando en forma sistemática, comenzando por el numerador

$$\vec{J}_S \wedge (\vec{r} - \vec{r}') = J_S(x - x')(-\hat{k}) + z J_S \hat{i},$$

luego el denominador es

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}.$$

Entonces, el campo magnético viene determinado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_S(x - x')(-\hat{k}) + J_S z \hat{i}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy'.$$

Las componentes cartesianas de  $\vec{B}$  son:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_S \frac{z dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_S \frac{-(x - x') dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

Para evaluar las integrales, realizamos primero el cambio de variables simple  $u = x' - x$ ,  $v = y' - y$ , con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{u=-x}^{a-x} z du \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{dv}{[u^2 + v^2 + z^2]^{3/2}} \\ B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{u=-x}^{a-x} u du \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{dv}{[u^2 + v^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

En ambos casos hay que evaluar integrales similares

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{dv}{[u^2 + v^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2}{u^2 + z^2}.$$

El valor dado se obtiene definiendo  $R = \sqrt{u^2 + z^2}$ , y haciendo el cambio de variables  $v = R \tan(\theta)$ , con lo cual los límites de integración  $(-\infty, \infty)$  se transforman en  $(-\pi/2, \pi/2)$ , y la integral es elemental. Entonces,

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0 J_S}{2\pi} \int_{u=-x}^{a-x} \frac{z du}{[u^2 + z^2]} \\ B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_0 J_S}{2\pi} \int_{u=-x}^{a-x} \frac{u du}{[u^2 + z^2]}. \end{aligned}$$

### 11.6.3 Problema 2

Un haz de partículas cargadas, que se mueven con velocidad  $v_0$ , en la dirección del eje  $z$ , pasa sin desviarse, a través de una región del espacio en la que existen campos eléctricos y magnéticos estáticos, mutuamente perpendiculares ( $E$  y  $B$ ). Cuando el campo magnético se desconecta, la traza del haz sobre la pantalla se corre una distancia  $\Delta x$ . Si se conocen las distancias  $a$  y  $b$  de la figura, determine el valor del cociente  $q/m$  de las partículas.

### 11.6.4 Solución Problema 2

Se sabe que el campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje  $x$  de la figura, pues las partículas se desvían en esa dirección, cuando el campo magnético está ausente. Suponemos entonces que el campo eléctrico es de la forma  $\vec{E} = E\hat{i}$ .

Respecto al campo magnético, éste debe tener una dirección tal que, cuando están ambos presentes ambos, las partículas deben pasar sin desviarse. Para esto es necesario que se cumpla que la fuerza sobre las partículas del haz sea nula,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}).$$

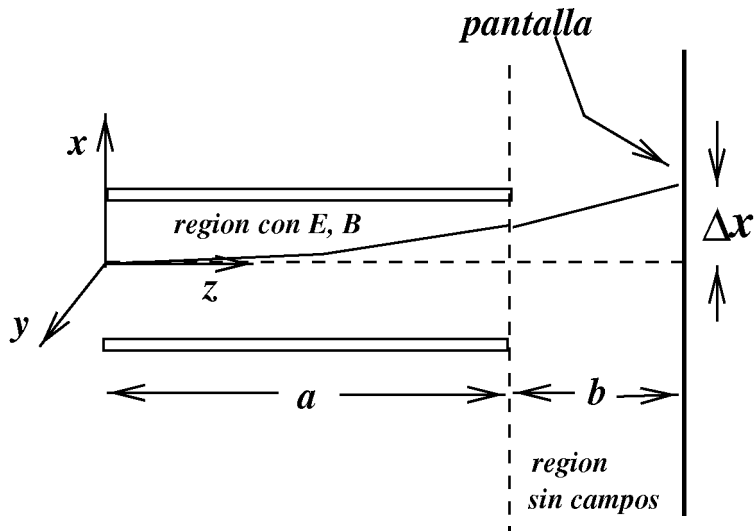


Figura 11.11:

Se puede verificar fácilmente que  $\vec{B} = B\hat{j}$  (perpendicular a  $\vec{E}$ , como se indica en el enunciado) es adecuado, pues

$$\vec{F} = q(E - v_0 B)\hat{i}.$$

De esta manera, los campos están relacionados,

$$E = v_0 B.$$

Cuando las partículas ingresan con velocidad  $v_0\hat{k}$ , en ausencia de campo magnético, son aceleradas por el campo eléctrico, en la región  $0 < z < a$ , de donde emergen al cabo de un tiempo  $t_1 = a/v_0$ , con una pequeña desviación 'vertical'  $x_1$ , y velocidad  $\vec{v}_1$ ,

$$x_1 = qEa^2/2mv_0^2$$

$$v_{1x} = qEa/mv_0$$

$$v_{1z} = v_0.$$

El siguiente tramo se realiza a velocidad constante, en un tiempo  $t_2 = b/v_0$ , en que las partículas llegan a la pantalla, con desviación total  $\Delta x$ ,

$$\Delta x = x_1 + v_{1x}t_2 = Ea^2/2v_0^2 + qEab/mv_0^2.$$

De esta manera, obtenemos

$$\frac{q}{m} = \frac{2v_0^2\Delta x}{a(a+2b)E}.$$

## 11.7 Control No. 1

### 12 de Abril de 1999

#### 11.7.1 Problema 1

Se tiene dos cascarones esféricos concéntricos, de radios  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ). El cascarón exterior tiene carga total  $q$ , y el cascarón interior se encuentra a potencial cero ('a tierra').

- Determine el potencial electrostático  $V(r)$ , en todo el espacio. Suponga que el cascarón exterior tiene un grosor despreciable.
- Determine la carga total del cascarón interior, en función de la carga del cascarón exterior.

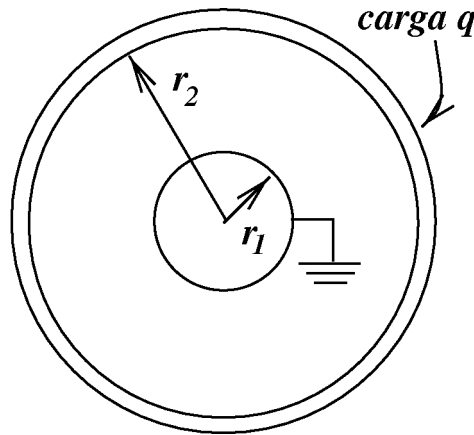


Figura 11.12:

#### 11.7.2 Solución Problema 1

Claramente, el problema tiene simetría esférica, por lo tanto el potencial  $V(\vec{r}) = V(r)$ , es decir, depende solamente de la variable radial  $r$ , y no de las variables angulares ( $\theta, \phi$ ).

El potencial  $V(r)$ , se puede escribir en la forma

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < r_1 \\ \frac{\alpha}{r} + \beta & r_1 < r < r_2 \\ \frac{\gamma}{r} + \delta & r_2 < r \end{cases}$$

Hemos supuesto que el cascarón exterior es muy delgado, y despreciamos su espesor. Suponemos, además, que  $V(\infty) = 0$ , lo cual implica que  $\delta = 0$ .

Aplicamos ahora las condiciones de continuidad del potencial en  $r = r_1$  y  $r = r_2$ , lo que nos da las relaciones

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \beta = 0 \quad (11.1)$$

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \beta = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (11.2)$$

De estas ecuaciones obtenemos,

$$\beta = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (11.3)$$

$$\gamma = \alpha r_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (11.4)$$

Falta determinar  $\alpha$ , lo cual se puede hacer usando el teorema de Gauss a una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , tal que  $r_1 < r < r_2$ . El campo eléctrico en dicha región es

$$E(r) = \frac{\alpha}{r^2},$$

con lo cual su flujo es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi^2 E(r) = 4\pi\alpha = Q(S)/\epsilon_0.$$

Evidentemente,  $q' = Q(S) = 4\pi\epsilon_0\alpha$  puede identificarse con la carga en la esfera interior, que está 'a tierra'. De la misma manera, el campo en el exterior nos dará información sobre la carga total del sistema, que debe ser  $(q + q')$ . Por el teorema de Gauss, podemos identificar

$$4\pi\epsilon_0\gamma = q + q'$$

con esto tenemos, usando  $q$  y  $q'$  en lugar de  $\alpha$  y  $\gamma$ ,

$$q + q' = q' r_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = q' - \frac{r_2}{r_1} q',$$

lo cual nos da la relación

$$q' = -\frac{r_1}{r_2} q.$$

Ahora podemos escribir todos los coeficientes,

$$\alpha = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{r_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} q \quad (11.5)$$

$$\beta = -\frac{\alpha}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} q \quad (11.6)$$

$$\gamma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \quad (11.7)$$

Para completar, podemos escribir el potencial  $V(r)$  en todo el espacio, en la forma

$$V(r) = \begin{cases} 0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \end{cases}$$

La carga en el conductor interior ya ha sido determinada, y tiene el valor  $q' = -\frac{r_1}{r_2} q$ . Notar que habría sido incorrecto suponer que el conductor interior estuviera descargado, pues no se encuentra aislado.

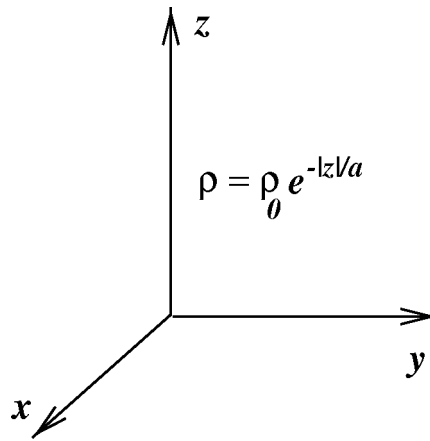


Figura 11.13:

### 11.7.3 Problema 2

Se tiene una distribución de carga con simetría plana,  $\rho(\vec{r}) = \rho_0 e^{-|z|/a}$ , en que  $\rho_0$  y  $a$  son constantes. Se pide determinar el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , en todo el espacio. Resuelva este problema por integración directa, indicando y fundamentando claramente las consideraciones de simetría que sean aplicables.

### 11.7.4 Solución Problema 2

La distribución da carga dada  $\rho(\vec{r}) = \rho(z)$ , no depende de las variables  $(x, y)$ , por lo tanto, como, para cada  $z = cte.$  se extiende indefinidamente sobre un plano infinito, tenemos una situación similar al caso del plano infinito visto en clase, lo cual indica que el campo eléctrico debe ser independiente de las variables  $x, y$ . Por el mismo argumento, el campo eléctrico debe ser perpendicular al plano  $xy$ , es decir,  $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}$ , en que  $\hat{k}$  es un vector perpendicular al plano  $xy$ . Las componentes  $E_x$  y  $E_y$  del campo se anulan.

Se puede decir también que este problema es equivalente a una superposición de planos infinitos, paralelos al plano  $xy$ , con densidad de carga superficial  $\rho(z')dz'$ , cada uno de los cuales contribuye al campo eléctrico con la cantidad

$$dE(z, z') = \frac{\rho(z')dz'}{2\epsilon_0} H(z - z'),$$

en que  $H(z)$  es el signo de  $z$ . Por lo tanto, el campo total debido a todos los planos será

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(z')dz'}{2\epsilon_0} H(z - z').$$

Con esto podemos ahora calcular el campo para la distribución de carga que nos interesa. Podemos escribir

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z'|/a} H(z - z') dz' \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^z e^{-|z'|/a} H(z - z') dz' + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_z^{\infty} e^{-|z'|/a} H(z - z') dz' \end{aligned}$$

Observamos enseguida que, para  $z'$  en el intervalo  $(-\infty, z)$  se tiene  $H(z - z') = 1$ , mientras que para  $z'$  en el intervalo  $(z, \infty)$  tiene el valor  $H(z - z') = -1$ . Por esto, podemos escribir

$$E(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^z e^{-|z'|/a} dz' - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_z^{\infty} e^{-|z'|/a} dz'.$$

Para evaluar estas integrales, supongamos primero que  $z > 0$ , entonces  $z = |z|$ , y separamos las integrales en la forma

$$E(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-\infty}^{-|z|} e^{-|z'|/a} dz' + \int_{-|z|}^{|z|} e^{-|z'|/a} dz' - \int_{|z|}^{\infty} e^{-|z'|/a} dz' \right].$$

Notamos de inmediato que, por la simetría del integrando, la primera integral y la última se cancelan, por lo tanto, para  $z > 0$

$$E(|z|) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{-|z|}^{|z|} e^{-|z'|/a} dz'.$$

Es fácil ver también que, si  $z < 0$  tendremos en cambio la misma expresión, pero con el signo opuesto. De nuevo, debido a la simetría (de reflexión especular respecto al plano  $z = 0$ , se tiene  $E(-|z|) = -E(|z|)$ , y resumiendo

$$E(z) = \frac{\rho_0 H(z)}{2\epsilon_0} \int_{-|z|}^{|z|} e^{-|z'|/a} dz'.$$

La integral restante es trivial,

$$\int_{-|z|}^{|z|} e^{-|z'|/a} dz' = 2 \int_0^{|z|} e^{-|z'|/a} dz' = 2a(1 - e^{-|z|/a}),$$

de manera que el resultado final es

$$E(z) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} (1 - e^{-|z|/a}) H(z).$$

### 11.7.5 Problema 3

Un modelo atómico simple representa al núcleo como una carga puntual de valor  $Ze$ , y a los electrones a su alrededor como una distribución esférica, uniforme, de radio  $a$  y carga  $-Ze$ , concéntrica con el núcleo.

- Encuentre el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , en todo el espacio, producido por esta distribución de carga.
- Determine el potencial electrostático  $V(\vec{r})$ , en todo el espacio. Suponga que el potencial  $V(\vec{r})$  se anula en el infinito.

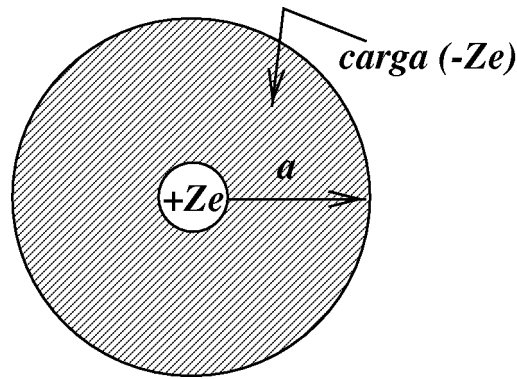


Figura 11.14:

### 11.7.6 Solución Problema 3

El problema corresponde al modelo atómico de Thompson. Para resolver este problema, usaremos el teorema de Gauss, notando que hay simetría esférica,  $E(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ , por lo tanto el flujo que atraviesa una superficie esférica de radio  $r$ , concéntrica con el núcleo y la distribución de carga está dado por

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = Q(S)/\epsilon_0.$$

- i) Para  $0 < r < a$  la carga encerrada es  $Q(r) = Ze + 4\pi r^3 \rho_0/3$ , en que  $\rho_0 = -3Ze/4\pi a^3$ , por lo tanto tenemos (después de simplificar),

$$E(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^3} \right).$$

- ii) Para  $r > a$ , la carga encerrada es cero, luego el campo eléctrico  $E = 0$ . Ahora podemos determinar el potencial electrostático  $V(r)$ , a partir de la ecuación  $-dV/dr = E(r)$ , y tenemos

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Zer^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + c_1 & 0 < r < a \\ c_2 & r > a \end{cases}$$

Usamos ahora las condiciones de borde del problema,  $V(\infty) = 0$ , que implica  $c_2 = 0$ , y la continuidad de  $V(r)$  en  $r = a$ , que da la ecuación

$$\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Ze}{8\pi\epsilon_0 a} + c_1 = 0,$$

de donde obtenemos  $c_1 = -3Ze/8\pi\epsilon_0 a$ , y finalmente

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2a^3} - \frac{3}{2a} \right) & 0 < r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

## 11.8 Control #2 Electricidad y Magnetismo

### 10 de Mayo de 1999

#### 11.8.1 Problema 1

Se tienen tres condensadores conectados a una batería, en la forma que se indica en la figura. Existen dos interruptores,  $S_1$  y  $S_2$ , que se encuentran inicialmente abiertos.

- Se cierra el interruptor  $S_1$ . Determine las cargas en cada una de las placas conductoras y la energía electrostática del sistema.
- Enseguida, se cierra el interruptor  $S_2$ . Determine la carga en condensador  $c_3$  y la nueva energía electrostática.

Nota: Los condensadores tienen las siguientes capacidades:

$$c_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{a_1 b_1}{b_1 - a_1}, \quad c_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{a_2 b_2}{b_2 - a_2}, \quad c_3 = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

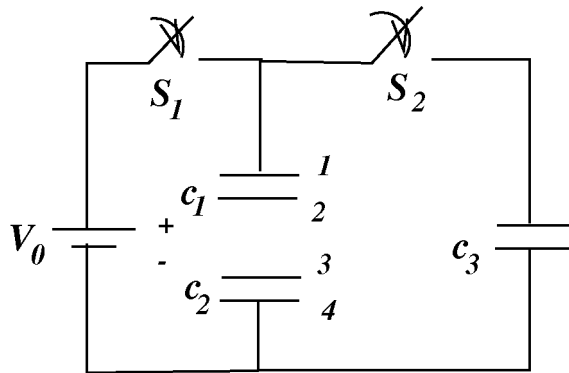


Figura 11.15:

#### 11.8.2 Solución Problema #1

Al cerrar el interruptor  $S_1$ , el condensador equivalente se carga con la diferencia de potencial  $V_0$ . Su capacidad (equivalente) es  $c$ , correspondiente a  $c_1$  y  $c_2$  en serie,  $c = c_1 c_2 / (c_1 + c_2)$ , luego la carga es  $Q_0 = cV_0$ . Las cargas son:  $Q_0$  en la placa (1),  $-Q_0$  en la placa (2),  $Q_0$  en la placa (3), y  $-Q_0$  en la placa (4).

La energía potencial electrostática  $U$  es

$$U = \frac{cV_0^2}{2} = \frac{c_1 c_2 V_0^2}{2(c_1 + c_2)}.$$

Al cerrar el interruptor  $S_2$ , habiendo retirado la batería, la carga  $Q_0$  se reparte entre el condensador  $c_3$  y el condensador 'equivalente'  $c$ , de manera que

$$\begin{aligned} Q_3 + Q &= Q_0 \\ \Delta V_3 &= \frac{Q_3}{c_3} = \frac{Q}{c} = \Delta V, \end{aligned}$$

resolviendo estas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{c_3}{c + c_3} Q_0 \\ Q &= \frac{c}{c + c_3} Q_0. \end{aligned}$$

La energía electrostática será ahora

$$U = \frac{Q^2}{2c} + \frac{Q_3^2}{2c_3} = \left(\frac{c_3}{c + c_3} Q_0\right)^2 / 2c_3 + \left(\frac{c}{c + c_3} Q_0\right)^2 / 2c$$

reordenando

$$U = \frac{c_3}{2(c + c_3)^2} Q_0^2 + \frac{c}{2(c + c_3)^2} Q_0^2 = \frac{Q_0^2}{2(c + c_3)}.$$

### 11.8.3 Problema 2

Se tiene una esfera conductora, de radio  $a$ , semienterrada hasta la mitad en un dieléctrico homogéneo semininfinito, de constante dieléctrica  $\epsilon$  (suelo). La otra mitad se encuentra rodeada de aire; se puede suponer que la constante dieléctrica del aire es  $\epsilon_0$ . Se pide determinar:

- Los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , y el potencial electrostático  $V(r)$ , en todo el espacio.
- La capacidad de la esfera y la densidad de carga superficial sobre la superficie de la esfera.

Nota: Suponga a priori que el campo eléctrico  $\vec{E}$  tiene simetría esférica.

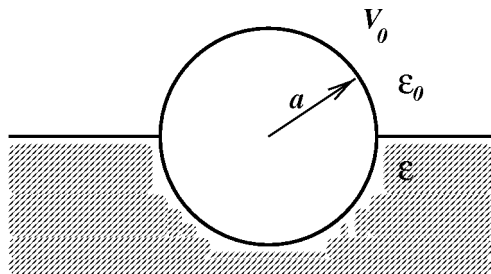


Figura 11.16:

### 11.8.4 Solución Problema #2

- a) La esfera conductora está a potencial  $V_0$ . De acuerdo a la indicación, el campo eléctrico tiene simetría esférica, y por lo tanto, el potencial  $V(r)$  también. Entonces, es inmediato que

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta,$$

en que las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  dependen de las condiciones de borde. Suponemos que el potencial se anula en el infinito, por lo tanto, la constante  $\beta$  debe anularse,  $\beta = 0$ ; además, en  $r = a$  se tiene  $V(r = a) = V_0$ ,

$$V_0 = \frac{\alpha}{a}.$$

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0 a / r \\ \vec{E}(r) &= V_0 a / r^2 \hat{r} \\ \vec{D}(r) &= \epsilon_0 \vec{E} \quad , \text{ para } z > 0 \\ &= \epsilon \vec{E} \quad , \text{ para } z < 0 \end{aligned}$$

- b) La carga sobre la esfera conductora se determina usando el teorema de Gauss, que nos da

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi a V_0 (\epsilon + \epsilon_0).$$

Con esto tenemos, de inmediato, los resultados

$$\begin{aligned} C &= 2\pi a (\epsilon + \epsilon_0) \\ \sigma &= (\epsilon + \epsilon_0) / a. \end{aligned}$$

### 11.8.5 Problema 3

Un cable coaxial está formado por dos conductores perfectos, cilíndricos, coaxiales, de radios  $a$  y  $b$ , de longitud  $L$  ( $L \gg a, b$ ). El espacio entre los conductores se llena con dos dieléctricos imperfectos de constantes  $(\epsilon_1, g_1)$  y  $(\epsilon_2, g_2)$ , como se muestra en la figura. La diferencia de potencial entre los conductores es  $V_0$ .

- a) Determine el los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{J}$  dentro del cable.
- b) Determine la resistencia  $R$  del cable coaxial, y represéntela gráficamente como un circuito equivalente.

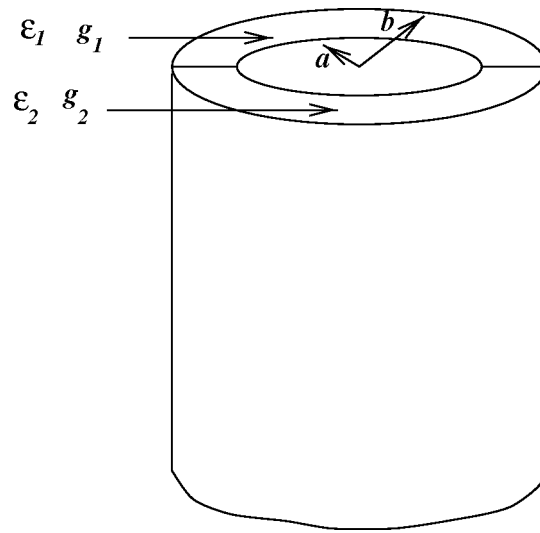


Figura 11.17:

### 11.8.6 Solución Problema #3

- a) Podemos suponer que tanto el potencial como el campo eléctrico tienen simetría cilíndrica,  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ , en que  $r$  es la distancia al eje  $z$ , y  $\hat{r}$  el vector unitario radial. De esta manera, el campo debe ser de la forma

$$E(r) = \frac{\alpha}{r}.$$

El potencial se obtiene de su definición, y tiene la forma

$$V(r) = -\alpha \ln \left[ \frac{r}{r_0} \right],$$

para valores adecuados de  $\alpha$  y  $r_0$ . Suponiendo que los potenciales en los conductores,  $V_a$  y  $V_b$  son tales que  $V_0 = V_a - V_b$ , tenemos

$$\begin{aligned} V_a &= -\alpha \ln \left[ \frac{r}{r_0} \right] \\ V_b &= -\alpha \ln \left[ \frac{r}{r_0} \right] \\ V_0 &= \alpha \ln \left[ \frac{b}{a} \right]. \end{aligned}$$

Notemos que el campo eléctrico radial (simetría cilíndrica) garantiza que la componente del campo eléctrico paralelo a la interfaz entre los conductores es continua. El campo eléctrico es entonces

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{b}{a} \right] r} \hat{r}.$$

El vector densidad de corriente es  $\vec{J}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{J} &= g_1 \vec{E} && \text{en el medio 1} \\ &= g_2 \vec{E} && \text{en el medio 2}\end{aligned}$$

- b) Para determinar la resistencia  $R$  debemos calcular la corriente total que fluye entre los conductores,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi V_0}{\ln [b/a]} (g_1 + g_2) L.$$

De acuerdo con esto, la resistencia debida a los medios conductores (1) y (2) es

$$R = \frac{\ln [b/a]}{\pi L (g_1 + g_2)}.$$

Es evidente, de la disposición geométrica, que este resultado puede interpretarse como la combinación en paralelo de los medios (1) y (2). En efecto, notamos que las resistencias de cada medio por separado,  $R_1$ , y  $R_2$ , respectivamente, son

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{\ln [b/a]}{\pi L g_1} \\ R_2 &= \frac{\ln [b/a]}{\pi L g_2}.\end{aligned}$$

Con esto, es claro que se cumple la relación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

que indica que se trata efectivamente de una combinación en paralelo.

## 11.9 Control # 3

### 14 de Junio de 1999

#### 11.9.1 Problema 1

Se tiene una argolla muy delgada, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , a la que se ha cortado un trozo, de ángulo  $\alpha$ . La argolla está hecha de un material de conductividad  $g$ , y sus extremos están terminados en dos placas muy delgadas hechas de conductor ideal, las que son mantenidas a una diferencia de potencial  $V_0$ , por medio de una batería.

- Determine la densidad de corriente  $\vec{J}$ , el campo eléctrico  $\vec{E}$ , y el potencial  $V(\vec{r})$ , dentro de la argolla. Suponga que el potencial electrostático depende solamente de la coordenada angular  $\phi$ .
- Determine el campo magnético  $\vec{B}$ , producido por la distribución de corriente  $\vec{J}$ , en el centro de la argolla.

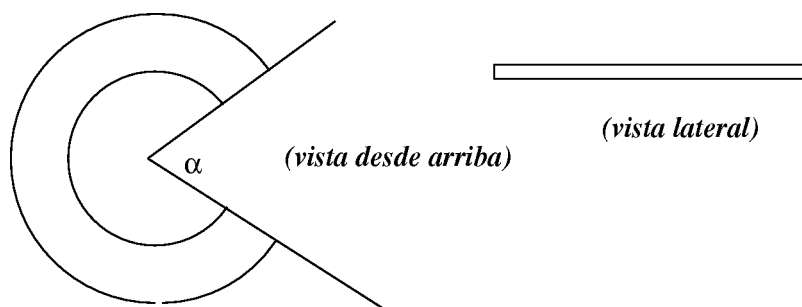


Figura 11.18:

#### 11.9.2 Solución Problema 1

- Podemos suponer, de acuerdo a la indicación, que el potencial  $V = V(\phi)$ , y por lo tanto la corriente fluye en la dirección contraria a los punteros del reloj (aquí suponemos que  $V(0) = 0$ , y  $V(2\pi - \alpha) = V_0$ ). La ecuación de Laplace se convierte simplemente en

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0,$$

cuya solución, con las condiciones de borde indicadas, es

$$V(\phi) = \frac{V_0}{(2\pi - \alpha)}\phi.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico y la corriente son:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\phi} = -\frac{V_0}{(2\pi - \alpha)r} \hat{\phi} \\ \vec{J} &= g\vec{E} = -\frac{gV_0}{(2\pi - \alpha)r} \hat{\phi}.\end{aligned}$$

Como la argolla es muy delgada (espesor  $\delta$ ), podemos representar su efecto por el de una corriente superficial  $J_s$ ,

$$\vec{J}_S = -\frac{gV_0\delta}{(2\pi - \alpha)r}\hat{\phi}$$

- b) El campo magnético en el punto de coordenadas  $\vec{r} = \vec{0}$  se puede evaluar mediante la expresión

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_S(r') \wedge (-\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3} dS'.$$

Para evaluar esta expresión tomamos primero el numerador,

$$\vec{J}_S(\vec{r}') \wedge \vec{r}' = -\frac{gV_0\delta}{(2\pi - \alpha)r}\hat{\phi} \wedge \vec{r}' = \frac{gV_0\delta}{(2\pi - \alpha)}\hat{k},$$

entonces

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 g V_0 \delta}{2(2\pi - \alpha)} \hat{k} \int_a^b \frac{dr}{r^2}.$$

Finalmente,

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 g V_0 \delta}{2(2\pi - \alpha)} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \hat{k}.$$

### 11.9.3 Problema 2

- a) Considere un campo magnético con simetría cilíndrica, de la forma  $\vec{B}(r, \phi, z) = B_r(r, z)\hat{r} + B_z(r, z)\hat{z}$ . Suponga que  $\partial B_z / \partial z \neq 0$ , entonces demuestre que, para  $r$  pequeño se tiene:

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}.$$

- b) Considere una espira pequeña, de radio  $a$ , colocada en el eje de simetría de un campo magnético como el descrito en la parte (a). Calcule la fuerza magnética que dicho campo ejerce sobre la espira, y muestre que se puede escribir en la forma:

$$\vec{F} = m \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \hat{z},$$

en que  $m = \pi a^2 I$  es el llamado momento dipolar magnético de la espira.

- c) El campo magnético  $B_z(0, z)$ , en el eje de un solenoide (o bobina) de radio  $a$ , largo  $L$ , y  $N$  vueltas, por el que circula una corriente  $I$  está dado por

$$B_z = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[ \frac{(L/2 - z)}{\sqrt{a^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{(L/2 + z)}{\sqrt{a^2 + (L/2 + z)^2}} \right]$$

Use los resultados anteriores para calcular la componente radial de este campo magnético, en puntos sobre una espira dispuesta como en la parte (b), y la fuerza que este campo ejerce sobre ella.

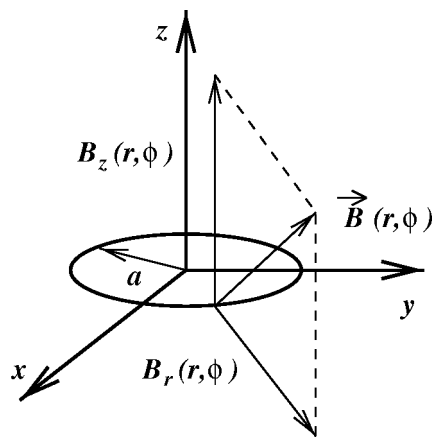


Figura 11.19:

### 11.9.4 Solución Problema 3

- a) El campo magnético tiene simetría cilíndrica, es decir  $\vec{B} = B_r(r, z)\hat{r} + B_z(r, z)\hat{k}$ , entonces la ecuación  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r(r, z)) + \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z}.$$

Entonces, para  $r$  pequeño tenemos

$$\frac{\partial(r B_r(r, z))}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z} \approx -r \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}.$$

Entonces, se debe tener (aproximadamente)

$$r B_r = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} + c,$$

en que  $c$  es una constante. Para que la ecuación sea válida en particular para  $r = 0$  debemos tomar  $c = 0$ , entonces:

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}.$$

- b) Si colocamos una espira pequeña en el eje de simetría del campo anterior, ella experimenta una fuerza magnética dada por

$$\vec{F} = \int_{\text{espira}} I d\vec{r} \wedge \vec{B}(\vec{r}).$$

En nuestro caso,  $\vec{r} = a\hat{r}$ ,  $d\vec{r} = a\hat{\phi}d\phi$ ; entonces

$$\vec{F} = \int_{\text{espira}} I a d\phi \left( B_r(a, z)(-\hat{k}) + B_z(a, z)(\hat{r}) \right).$$

Se observa que el segundo término de la integral se anula, por lo tanto, reemplazando el resultado obtenido en (a),

$$\vec{F} = -2\pi I a B_r(a, z)\hat{k} = m \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \hat{k}.$$

- c) Podemos usar la fórmula demostrada en (b), para lo cual calculamos la derivada de  $B_z$ ,

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left( -\frac{a^2}{[a^2 + (L/2 - z)^2]^{3/2}} + \frac{a^2}{[a^2 + (L/2 + z)^2]^{3/2}} \right).$$

Entonces, la componente radial de  $\vec{B}$  es

$$B_r(r, z) \approx -\frac{\mu_0 N I r a^2}{4} \left( -\frac{a^2}{[a^2 + (L/2 - z)^2]^{3/2}} + \frac{a^2}{[a^2 + (L/2 + z)^2]^{3/2}} \right).$$

### 11.9.5 Problema 3

Se tiene un cilindro conductor de radio  $a$ , muy largo; por cuya superficie fluye una corriente superficial  $\vec{J}_s$ , en la forma que se indica en la figura.

- Determine el campo magnético en el interior del cilindro. Muestre rigurosamente que el campo debe ser uniforme.
- Determine la presión que el campo magnético anterior ejerce sobre las paredes del cilindro. Nota: Estrictamente, en este cálculo se debe usar el campo en puntos sobre la distribución de corriente; este campo es la mitad del campo calculado en (a).

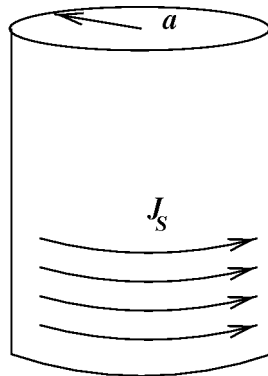


Figura 11.20:

### 11.9.6 Solución Problema 3

- Por la simetría del problema, sabemos que el campo magnético debe estar dirigido a lo largo del eje  $z$ , además, éste campo sólo puede depender de  $r$ , y no de  $z$ , pues el cilindro es muy largo. Entonces

$$\vec{B} = B(r)\hat{k}.$$

De esta manera, como  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$ , entonces,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial r} \hat{\phi} = \vec{0},$$

por lo tanto, concluimos que el campo magnético es uniforme, tanto en el interior del cilindro, como en el exterior, donde vale cero. En cuanto a su valor, la ley circuital de Ampere, aplicada a una trayectoria rectangular paralela al eje del cilindro, permite mostrar que

$$B = B_0 = \mu_0 J_s.$$

- b) Para determinar la presión, calculamos la fuerza sobre un elemento de corriente,  $d\vec{F}$ , de área  $d\vec{S}$ ,

$$d\vec{F} = \vec{J}_s \wedge \vec{B}',$$

en que, como se indicó, el campo aplicado sobre el conductor es  $\vec{B}' = (B_0/2)\hat{k}$ . Tenemos entonces

$$d\vec{F} = J_s \hat{\phi} \wedge B' \hat{k} dS' = \mu_0 J_s^2 / 2 dS' \hat{r}.$$

Esto significa que, sobre cada elemento de área  $dS'$  se ejerce una fuerza radial, esto es, una presión,  $P$ ,  $d\vec{F} = P dS' \hat{r}$ , donde la presión es:

$$P = \mu_0 J_s^2 / 2.$$

## 11.10 Examen

### 6 de Julio de 1999

#### 11.10.1 Problema #1

En el circuito de la figura, la f.e.m. alterna es de frecuencia  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Determine la amplitud y la fase de la corriente que pasa a través de la resistencia, en función de los parámetros del circuito.

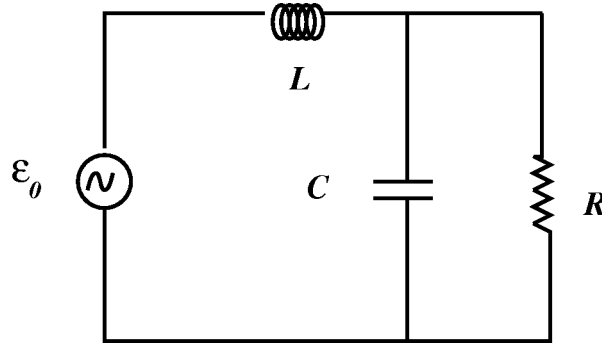


Figura 11.21:

#### 11.10.2 Solución Problema 1

En el circuito, la resistencia ( $Z_R = R$ ) y el condensador ( $Z_C = 1/j\omega C$ ) están en paralelo, con impedancia  $Z_0$ , donde

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + j\omega C,$$

entonces

$$Z_0 = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} - j \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}.$$

La impedancia del sistema es  $Z = Z_0 + j\omega L$ ,

$$Z = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j\omega L \left[ 1 - \frac{(C/L)R^2}{1 + (\omega CR)^2} \right].$$

Por lo tanto, en el caso indicado,  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , la impedancia  $Z$ , su magnitud y fase son

$$Z = \frac{R + j\sqrt{L/C}}{1 + CR^2/L}$$

$$|Z| = \frac{\sqrt{L/C}}{\sqrt{1 + CR^2/L}}$$

$$\text{tg}(\phi) = \omega L/R = \sqrt{L/C}.$$

Suponemos que la fem es  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , por lo tanto  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \exp(j\omega t)$ , y la corriente  $I(t)$  es

$$I(t) = \text{Re} \left[ \frac{\varepsilon_0 e^{j\omega t}}{Z} \right] = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi).$$

### 11.10.3 Problema #2

Para alturas pequeñas, el campo magnético terrestre puede aproximarse por  $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)(-\hat{i})$ , de acuerdo a las coordenadas de la figura. Se deja caer una espira conductora, de resistencia  $R$ , y masa  $m$ , desde una altura  $h$  y con velocidad inicial cero. Se pide:

- Determine la corriente inducida en la espira, despreciando los efectos de autoinducción.
- Calcule la fuerza magnética sobre la espira, y
- la velocidad de la espira, en función del tiempo.

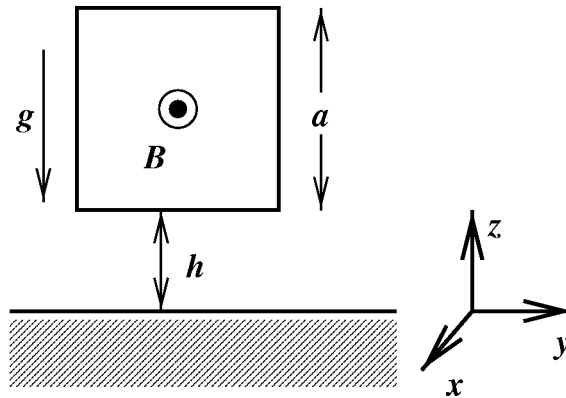


Figura 11.22:

### 11.10.4 Solución Problema 2

- Suponemos que la corriente  $I$  circula en dirección de los punteros del reloj. De acuerdo con esa dirección de recorrido, la normal es  $d\vec{S} = dydz(-\hat{i})$ , y el flujo sobre la espira es

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_h^{h+a} B_0(1 - \alpha z) dz \int_0^a dy = B_0 a \left( a - \alpha a^2/2 - \alpha ah \right).$$

Podemos calcular ahora la fem inducida sobre la espira, observando que  $dh/dt = v$ ,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \alpha a^2 v.$$

Para determinar la corriente, usamos la ley de Kirchoff,  $\varepsilon = RI$ ,

$$I(t) = \frac{B_0 \alpha a^2 v}{R}.$$

- La fuerza magnética sobre la espira se calcula usando la expresión

$$\vec{F} = \int_{1234} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = -B_0 I \alpha a \hat{k}.$$

Este resultado se obtiene notando que  $\vec{B}$  depende sólo de  $z$ , lo que implica que las integrales sobre los dos tramos verticales se cancelan entre sí. Como se observa, la fuerza estará dirigida hacia abajo si  $I > 0$ , y hacia arriba si  $I < 0$ , que es nuestro caso, pues la corriente es negativa si  $v < 0$ .

- c) La ecuación de movimiento de la espira, expresada en función sólo de la velocidad  $v$  es

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{(B_0 \alpha)^2 a^3}{R}.$$

Por lo tanto, la solución para la velocidad es:

$$v(t) = v_0 (1 - e^{-t/\tau}),$$

en que:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{mR}{(B_0 \alpha)^2 a^3} \\ v_0 &= -\tau g \end{aligned}$$

### 11.10.5 Problema #3

Un cilindro muy largo, de radio interior  $a$  y exterior  $b$  está polarizado, con un vector polarización  $\vec{P} = P_0(a/r)\hat{r}$ . El cilindro rota en torno a su eje de simetría con velocidad angular  $\omega$ . Despreciando los efectos de borde, calcule:

- Las densidades de carga de polarización y las corrientes correspondientes.
- El campo magnético en todo el espacio.

### 11.10.6 Solución Problema 3

- a) Las densidades de carga de polarización son  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ , y  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$ , en que  $\hat{n}$  es un vector unitario normal (exterior) a la superficie del dieléctrico. Entonces tenemos

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rP(r)) = 0.$$

Ahora, en la superficie  $r = a$ ,  $\hat{n} = -\hat{r}$ , mientras que en  $r = b$ ,  $\hat{n} = +\hat{r}$ , por lo tanto las densidades superficiales de carga de polarización son:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_P(r = a) = -P_0 \\ \sigma_b &= \sigma_P(r = b) = +P_0 \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

- b) Las densidades de carga  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$  giran en torno al eje del cilindro, por lo cual producen densidades de corriente superficiales,

$$\begin{aligned} \vec{J}_a &= a\omega\sigma_a\hat{\phi} = -\omega a P_0 \hat{\phi} \\ \vec{J}_b &= b\omega\sigma_b\hat{\phi} = \omega a P_0 \hat{\phi}. \end{aligned}$$

Para calcular el campo magnético, usamos la ley circuital de Ampere, en la forma

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(c).$$

El campo magnético tiene la dirección vertical,  $\vec{B} = B\hat{k}$ , por lo que evidente  $B = 0$  para  $r < a$ , y también para  $r > b$ . Tomando una trayectoria rectangular, de altura  $h$ , tenemos

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = hB = \mu_0 h a \omega P_0,$$

por lo tanto

$$\vec{B} = \mu_0 a \omega P_0 \hat{k}.$$