Solución Ejercicio 6

a) $$r(\phi) = \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\phi} \qquad r_0 = r_{mín} = R$$

$$\Rightarrow \quad r(\phi) = \frac{R(1+e)}{1+e\cos\phi}$$

$$r_{máx} \Rightarrow \cos\phi = -1$$

$$\Rightarrow \quad 5R = \frac{R(1+e)}{1-e} \Rightarrow 5-5e = 1+e$$

$$\Rightarrow 4 = 6e \Rightarrow \boxed{e = \frac{2}{3}}$$

Además:

$$\frac{h^2}{GM} = r_0(1+e) \Rightarrow h^2 = GMR\left(1+\frac{2}{3}\right)$$

$$h^2 = \frac{5}{3}GMR$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{l}{m} = \sqrt{\frac{5}{3}GMR} \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{\frac{5}{3}GMm^2 \cdot R}}$$

La velocidad máxima se obtiene cuando el radio de la órbita es mínimo y viceversa, así:

$$l = m \cdot R\, V_{max} = m5R\, V_{min} \quad \Rightarrow mRV_{max} = \sqrt{\frac{5}{3}GMm^2R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{GM}{R}}}$$

Con esto calculamos la energía con:

$$E = \frac{1}{2} m V_{max}^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$= \frac{5}{6}\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{6}\frac{GMm}{R}}$$

Y la velocidad mínima sale de: $mRV_{max} = m \cdot 5RV_{min}$

$$\Rightarrow V_{min} = \frac{1}{5} V_{max}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{min} = \sqrt{\frac{GM}{15R}}}$$

b) Como ya dijimos, en el punto más alejado es donde la rapidez es mínima, por lo tanto en $r = 5R$ se tendrá $V' = \frac{V_{min}}{2}$. Así: $V' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{15R}}$

Entonces $h = 5R \cdot V' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GMR \cdot 25}{15}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3} GMR}$

Ahora tenemos conservación de energía y momentum angular:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{GMm}{5R} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 - \frac{GMm}{\bar{r}} \quad (1)$$

donde $\bar{v}$ y $\bar{r}$ son la rapidez y el radio en el punto diametralmente opuesto de la nueva órbita.

Además,
$$l = m5Rv' = m\bar{r}\bar{v} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{5Rv'}{\bar{r}} = \frac{1}{2\bar{r}}\sqrt{\frac{5}{3}GMR} \quad 3$$

$$(1) \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{1}{60}\frac{GM}{R} - \frac{GMm}{5R}} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 - \frac{GMm}{\bar{r}}$$

$$-\frac{123}{120}\frac{GM\cancel{m}}{R} = \frac{1}{2}\cancel{m}\bar{v}^2 - \frac{GM\cancel{m}}{\bar{r}} \quad 4$$

reemplazando $\bar{v}$ de 3 en 4

$$-\frac{23}{120}\frac{\cancel{GM}}{R} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\bar{r}^2}\cdot\frac{5}{3}\cancel{GM}\cancel{R} - \frac{\cancel{GM}}{\bar{r}} \quad \Big/ \frac{\bar{r}^2}{R}$$

$$0 = \frac{23}{120}\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{\bar{r}}{R} + \frac{5}{24} \Rightarrow \frac{\bar{r}}{R} = \begin{cases} 5 \\ \frac{5}{23} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} r_{max} = 5R \\ r_{min} = \frac{5}{23}R \end{matrix}}$$