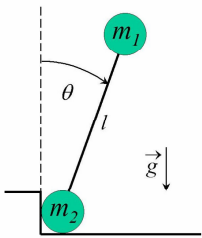


Complemento de Clase

ENUNCIADO 1



El sistema de la figura está inicialmente vertical y en reposo sobre una mesa. Además hay un escalón que impide que el extremo inferior de la barra deslice. Si se le aplica una pequeña perturbación de modo que el sistema cae por gravedad, encuentre:

- la reacción que ejerce la mesa sobre m_2
- el ángulo en que m_2 se despegue de la superficie horizontal, si $m_2 = m_1/4$

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el sistema en este caso y las coordenadas que usaremos se muestran en la figura siguiente:

Dado que existe el escalón, el punto O es fijo.

Para el sistema se cumple que:

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G \quad (1)$$

$$\vec{\tau}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad (\text{ya que } O \text{ es fijo}) \quad (2)$$

Evaluación de los términos de (1):

$$\vec{r}_{OG} = \vec{OG} = \frac{m_1 l \hat{r} + m_2 0 \hat{r}}{M} = \frac{m_1}{M} l \hat{r}$$

$$\vec{a}_G = -\frac{m_1}{M} l \dot{\theta}^2 \hat{r} + \frac{m_1}{M} l \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

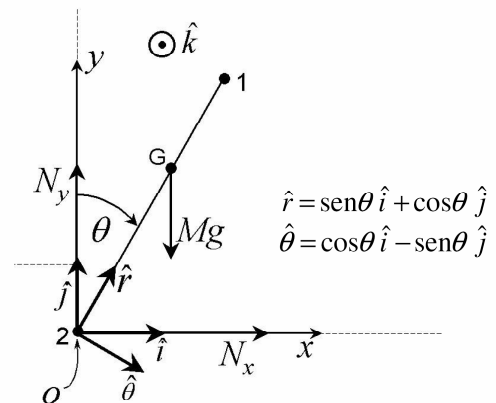
$$\vec{F}^{ext} = N_x \hat{i} + N_y \hat{j} - M g \hat{j}$$

$$\text{Reemplazando: } \begin{cases} N_x = -m_1 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_1 l \ddot{\theta} \cos \theta & (3.1) \\ N_y - M g = -m_1 l \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_1 l \ddot{\theta} \sin \theta & (3.2) \end{cases}$$

Evaluación de los términos de (2):

$$\vec{\tau}_O = \vec{OG} \times M \vec{g} = \frac{m_1}{M} l \hat{r} \times -M g \hat{j} = -m_1 l g \sin \theta \hat{k}$$

$$\vec{L}_O = \vec{O1} \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{O2} \times m_2 \vec{v}_2 = l \hat{r} \times m_1 l \dot{\theta} \hat{\theta} = -m_1 l^2 \dot{\theta} \hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = -m_1 l^2 \ddot{\theta} \hat{k}$$



$$\text{Reemplazando en (2): } m_1 l^2 \ddot{\theta} = m_1 l g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta \quad (4.1)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \frac{g}{l} [\cos \theta - \cos \theta_0] \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2 \frac{g}{l} [1 - \cos \theta] \quad (4.2)$$

Reemplazando (4.1) y (4.2) en (3.1) y (3.2):

$$\vec{N}_x = m_1 g \sin \theta [3 \cos \theta - 2] \hat{i}$$

$$\vec{N}_y = [m_1 g \cos \theta [3 \cos \theta - 2] + m_2 g] \hat{j} \quad \text{que es la reacción de la mesa sobre la partícula}$$

$$\text{b) Si } m_2 = m_1/4 \Rightarrow N_y = 4m_2 g \cos \theta [3 \cos \theta - 2] + m_2 g \quad (5)$$

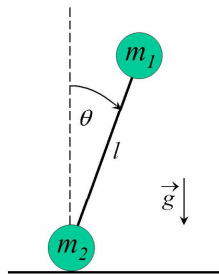
Se pide el ángulo para el cual m_2 se despegue de la mesa.

$$\text{Imponemos } N_y = 0 \text{ en (5)} \Rightarrow \cos \theta = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24}$$

que tiene las soluciones: $\cos \theta = 1/2$ y $\cos \theta = 1/6$

El sistema parte desde $\cos \theta = 1 \Rightarrow$ El valor que ocurre primero es: $\cos \theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/3$

ENUNCIADO 2



Para un sistema igual al del enunciado 1 y en las mismas condiciones, salvo que no existe el escalón, se pide:

- la velocidad angular de la barra en función de θ .
- La reacción que ejerce la mesa sobre m_2 .
- Determinar si existe un ángulo para el cual m_2 se despegue de la mesa.

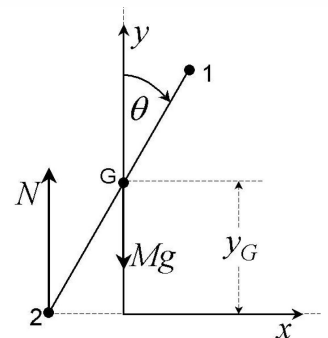
Solución:

En este caso no hay fuerzas externas horizontales, entonces la aceleración del centro de masas es sólo vertical. Debido a esto, en la medida que el centro de masas baja verticalmente por gravedad, m_2 tiene que moverse hacia la izquierda. Para el sistema se cumple que:

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G \quad (1)$$

$$\vec{\tau}_G^{ext} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \quad (2)$$

La ecuación (2) la referimos al centro de masas porque ahora el punto O no es inercial



Evaluación de los términos de (1):

$$\vec{F}^{ext} = N \hat{j} - M g \hat{j} = M (\ddot{x}_G \hat{i} + \ddot{y}_G \hat{j})$$

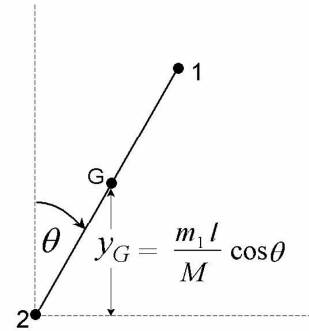
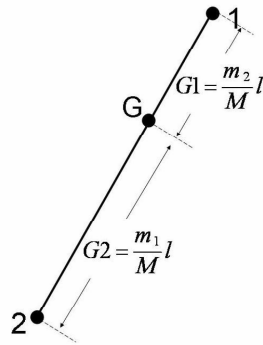
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = 0 \\ \ddot{y}_G = \frac{N}{M} - g \end{cases}$$

$$y_G = OG \cos \theta = \frac{m_1}{M} l \cos \theta$$

$$\dot{y}_G = -\frac{m_1}{M} l \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{m_1}{M} l [\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}]$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg - m_1 l (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})} \quad (*)$$



Evaluación de los términos de (2):

La única fuerza que hace torque con respecto a G es la Normal

$$\vec{\tau}_G = \vec{G2} \times \vec{N} = -\frac{m_1}{M} l \hat{r} \times N \hat{j} = -\frac{m_1}{M} l \sin \theta N \hat{k}$$

Dado que $\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$ (momento angular relativo al centro de masa) $\Rightarrow$ calculamos $\vec{L}_G^* = \sum_i \vec{G_i} \times m_i \dot{\vec{r}}_i$

$$\left. \begin{aligned} \vec{G2} &= -\vec{OG} = -\frac{m_1}{M} l \hat{r} \\ \vec{G1} &= \vec{O1} - \vec{OG} = \frac{m_2}{M} l \hat{r} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{M} l \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{M} l \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{L}_G^* = \vec{L}_G = \frac{m_2}{M} l \hat{r} \times m_1 \frac{m_2}{M} l \dot{\theta} \hat{\theta} + \left[-\frac{m_1}{M} \right] l \hat{r} \times \left[-\frac{m_1}{M} \right] l \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$= \frac{l^2 \dot{\theta}}{M^2} [m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2] (-\hat{k}) = -\frac{l^2 \dot{\theta} m_1 m_2}{M} \hat{k}$$

entonces: $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{l^2 m_1 m_2}{M} \ddot{\theta} \hat{k}$

En (2) $\Rightarrow \frac{m_1}{M} l \sin \theta N = \frac{l^2 m_1 m_2}{M} \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{N = \frac{l m_2}{\sin \theta} \ddot{\theta}} \quad (**)$

Igualando (*) con (**) $\Rightarrow l m_2 \ddot{\theta} = Mg \sin \theta - m_1 l (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}) \sin \theta$

donde: $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Rightarrow l \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} (m_2 + m_1 \sin^2 \theta) = (Mg - m_1 l \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta \quad (3)$

Observamos que la solución de la ecuación (3) no es fácil. Entonces planteamos un segundo método de solución

Solución por Energía:

Para el sistema: $EMT = cte = K + U$

Inicialmente: $K_0 = 0$

$U_0 = (U_G)_0 = m_1 g l$ (tomando la superficie de la mesa como referencia de potencial).

Durante el movimiento:

$$U_G = m_1 g l \cos \theta$$

$$K = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_1^2 m_i \dot{\rho}_i^2$$

$$\text{pero: } \sum_1^2 m_i \dot{\rho}_i^2 = \left[\frac{m_2^2 l^2}{M^2} m_1 + \frac{m_1^2 l^2}{M^2} m_2 \right] \dot{\theta}^2 = \frac{m_1 m_2}{M} l^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{m_1 m_2}{2M} l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{y ya habíamos calculado que } v_G = \dot{y}_G = -\frac{m_1}{M} l \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{m_1^2}{M} \sin^2 \theta + \frac{m_1 m_2}{M} \right] = \frac{1}{2} \frac{m_1}{M} l^2 \dot{\theta}^2 (m_1 \sin^2 \theta + m_2)$$

$$EMT = cte \Rightarrow m_1 g l = m_1 g l \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{m_1}{M} l^2 \dot{\theta}^2 (m_1 \sin^2 \theta + m_2) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2Mg (1 - \cos \theta)}{l (m_1 \sin^2 \theta + m_2)}$$

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{2Mg (1 - \cos \theta)}{l (m_1 \sin^2 \theta + m_2)}}$$

$$\text{b) Sea } m_2 = \alpha m_1 \Rightarrow M = m_1 (1 + \alpha) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2(1 + \alpha) g (1 - \cos \theta)}{l (\sin^2 \theta + \alpha)}$$

para determinar N necesitamos $\ddot{\theta}(\theta)$ y lo reemplazamos en (**)

Sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} &= \frac{1}{2\dot{\theta}} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{2(1+\alpha)g}{l} \frac{\sin \theta (\alpha + \sin^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \theta)}{(\alpha + \sin^2 \theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(1+\alpha)g}{l} \sin \theta \frac{(\alpha + \sin^2 \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta)}{(\alpha + \sin^2 \theta)^2} = \frac{(1+\alpha)g}{l} \sin \theta \frac{(\alpha + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\alpha + \sin^2 \theta)^2}$$

En (**):

$$\boxed{\vec{N} = \alpha m_1 (1+\alpha) g \frac{(\alpha + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\alpha + \sin^2 \theta)^2} \hat{j}}$$

A modo de verificación del resultado, observamos que: $\vec{N}(\theta = 0) = (1+\alpha) m_1 g \hat{j}$

c) Si θ_D es el ángulo de despegue $\Rightarrow N(\theta_D) = 0$

Reemplazando: $0 = \frac{(\alpha + 1 - 2 \cos \theta_D + \cos^2 \theta_D)}{(\alpha + \sin^2 \theta_D)^2} \Rightarrow \cos \theta_D = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\alpha)}}{2}$

Esto significa que no despegue para ningún valor de $\alpha > 0$.

Es decir no despegue, independientemente de la relación entre las masas.

Nota: En la solución de estos problemas, puede aplicarse un método más fácil en lo referente a la geometría del sistema. Esto involucra utilizar el concepto de "momento de inercia", que es materia de una próxima clase.