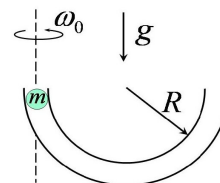


PROBLEMAS RESUELTOS MOVIMIENTO RELATIVO

Problema N°1 Control N°3 2007-1

Considere un tubo semi-circular de radio R , que gira con velocidad angular constante ω_0 respecto a un eje vertical, como indica la figura. En un cierto instante se coloca una partícula de masa m en el extremo del tubo que está sobre el eje de rotación, soltándola desde el reposo. La partícula desliza con roce despreciable por el interior del tubo. Calcule:



- Velocidad absoluta de la partícula al salir por el otro extremo del tubo.
- Fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula justo antes de que ésta salga del tubo.

Solución:

Expresamos primero la ecuación del movimiento. En la figura se muestra el sistema inercial y no inercial, a utilizar en nuestro análisis.

$$\vec{F} = -m(\vec{a}_0 + \vec{a}^{rel} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}))$$

Las fuerzas: $\vec{F} = mg(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}) + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$

Términos de la aceleración:

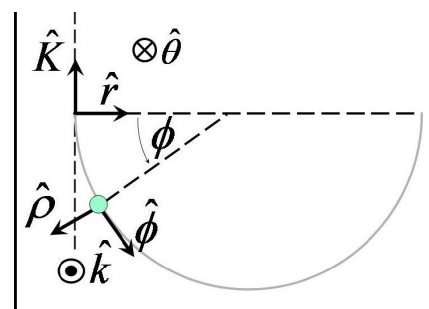
$$\vec{\Omega} = \omega_0\hat{K} = -\omega_0(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}); \quad \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

$$\vec{a}_0 = -\omega_0^2 R\hat{r} = -\omega_0^2 R(\sin\phi\hat{\phi} - \cos\phi\hat{\rho})$$

$$\vec{r}^{rel} = R\hat{\rho}; \quad \vec{v}^{rel} = R\dot{\phi}\hat{\phi}; \quad \vec{a}^{rel} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} = -2\omega_0(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}) \times R\dot{\phi}\hat{\phi} = -2R\omega_0\dot{\phi}\sin\phi\hat{k}$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}) = -\omega_0(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}) \times (\omega_0 R \cos\phi\hat{k}) = \omega_0^2 R(\sin\phi\cos\phi\hat{\phi} - \cos^2\phi\hat{\rho})$$



Por lo tanto, las ecuaciones escalares son:

$$\hat{\rho}: mg\sin\phi + N_\rho = mR(\omega_0^2\cos\phi - \dot{\phi}^2 - \omega_0^2\cos^2\phi) \quad (1)$$

$$\hat{\phi}: mg\cos\phi = mR(-\omega_0^2\sin\phi + \ddot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi\cos\phi) \quad (2)$$

$$\hat{k}: N_z = -2mR\omega_0\dot{\phi}\sin\phi \quad (3)$$

a) Velocidad absoluta de la partícula

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel} \Rightarrow \vec{v} = \omega_0 R\hat{\theta} + R\dot{\phi}\hat{\phi} + \omega_0 R\cos\phi\hat{k}, \text{ donde } \hat{\theta} = -\hat{k}$$

Se pide la velocidad absoluta para $\phi = \pi \Rightarrow$ necesitamos $\dot{\phi}(\phi = \pi)$

de (2): $\ddot{\phi} = \frac{g}{R}\cos\phi + \omega_0^2\sin\phi - \omega_0^2\sin\phi\cos\phi$

$$\dot{\phi}d\phi = \left(\frac{g}{R}\cos\phi + \omega_0^2\sin\phi - \omega_0^2\sin\phi\cos\phi\right)d\phi$$

Integrando entre 0 y π : $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2(\pi) = \frac{g}{R}\sin\phi\Big|_0^\pi - \omega_0^2\cos\phi\Big|_0^\pi - \omega_0^2\sin^2\phi\Big|_0^\pi = 2\omega_0^2 \Rightarrow \dot{\phi}(\pi) = 2\omega_0$

Por lo tanto, $\vec{v}(\pi) = -\omega_0 R\hat{k} + 2R\omega_0\hat{\phi} - \omega_0 R\hat{k} = 2R\omega_0\hat{\phi} - 2\omega_0 R\hat{k}$

b) Reacción del tubo sobre la partícula

de (1) $N_\rho(\pi) = -mg\sin\pi + mR(\omega_0^2\cos\pi - \dot{\phi}^2(\pi) - \omega_0^2\cos^2\pi) = mR(-\omega_0^2 - 4\omega_0^2 - \omega_0^2) = -6mR\omega_0^2$

de (3) $N_z(\pi) = -2mR\omega_0\dot{\phi}(\pi)\sin\pi = 0$

Por lo tanto: $\vec{N}(\pi) = -6mR\omega_0^2\hat{\rho}$

Problema N°2 Control N°3 2004-1

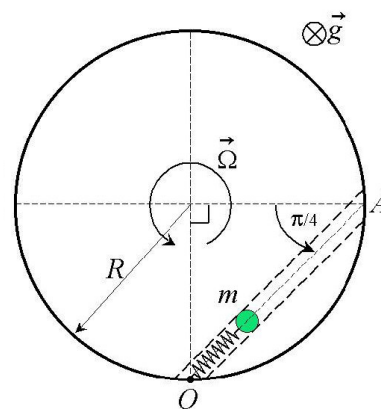
Una partícula P de masa m puede deslizarse sin roce por el interior de un tubo OA , que a su vez está fijo a un aro de radio R , con la geometría que se indica en la figura. La partícula está unida al extremo de un resorte de constante elástica k y largo natural cero, cuyo otro extremo está fijo al punto O .

El aro gira en torno a un eje vertical que pasa por su centro, con velocidad angular constante Ω , donde $\Omega^2 = k/2m$

Si inicialmente P se encuentra en el punto medio entre O y A , y su velocidad relativa al tubo es V_0 en la dirección de O hacia A .

Determine:

- La posición de P relativa al tubo en función del tiempo.
- La reacción que ejerce el tubo a P .



Solución:

En este problema interesa analizar el movimiento de la partícula dentro del tubo. Lo más conveniente es usar un sistema no inercial cartesiano, donde una de sus coordenadas coincide con el tubo.

Como se muestra en la figura, se define:

- un sistema fijo de coordenadas polares con origen en el centro del aro, de variables (r, θ) .
- un sistema móvil de coordenadas cartesianas con origen en O , de variables (x, y) , cuyo eje x coincide con la recta OA para todo el movimiento.

La ecuación general para el movimiento de la partícula visto desde el sistema no inercial es:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m [\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel})] \quad (1)$$

donde:

$$\vec{r}^{rel} = x \hat{i} \quad ; \quad \vec{V}^{rel} = \dot{x} \hat{i} \quad ; \quad \vec{a}^{rel} = \ddot{x} \hat{i}$$

$$\vec{F} = -k x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} - mg \hat{k}$$

$$\vec{a}_0 = -\Omega^2 R \hat{r} = \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} = \Omega \hat{k} \times \dot{x} \hat{i} = \Omega \dot{x} \hat{j}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) = \Omega \hat{k} \times (\Omega \hat{k} \times x \hat{i}) = \Omega \hat{k} \times \Omega x \hat{j} = -\Omega^2 x \hat{i}$$

Reemplazando estos términos en (1):

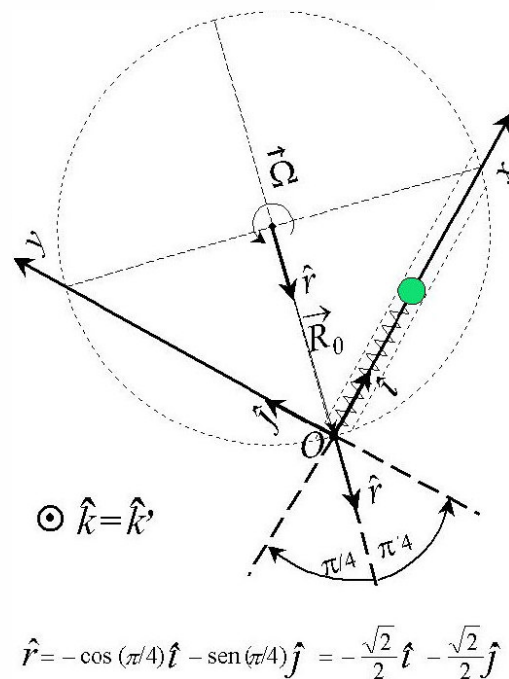
$$m \ddot{x} \hat{i} = -k x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} - mg \hat{k} - m \left[\Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} + 2\Omega \dot{x} \hat{j} - \Omega^2 x \hat{i} \right]$$

entonces, las ecuaciones escalares en el sistema no inercial son:

$$\text{según } \hat{i}: \quad m \ddot{x} = -k x - m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + m \Omega^2 x \quad (2.1)$$

$$\text{según } \hat{j}: \quad 0 = N_y - m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} - 2m \Omega \dot{x} \quad (2.2)$$

$$\text{según } \hat{k}: \quad 0 = N_z - mg \quad (2.3)$$



$$\hat{r} = -\cos(\pi/4) \hat{i} - \sin(\pi/4) \hat{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

a) la distancia de P a O en función del tiempo:

Reemplazando en (2.1) el valor $\Omega^2 = \frac{k}{2m}$ y ordenando los términos, obtenemos la siguiente ecuación diferencial para $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{k}{2m}x = \frac{k\sqrt{2}}{4m}R$$

de donde la solución para $x(t)$ es: $x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}R$

las condiciones iniciales son:

$$x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow B - \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow B = R\sqrt{2}$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \Rightarrow \Omega A = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\Omega} \quad (\text{si tomamos } V_0 = 0 \Rightarrow A = 0)$$

Por lo tanto:
$$x(t) = \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t + \sqrt{2}R \cos \Omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}R \quad (3)$$

b) la reacción que ejerce el tubo a P :

la reacción que ejerce el tubo sobre P es $\vec{N} = N_y \hat{j} + N_z \hat{k}$ donde N_y y N_z están dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) respectivamente.

de (2.2): $N_y = m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2m \Omega \dot{x}$

de (3): $\dot{x}(t) = V_0 \cos \Omega t + \sqrt{2}R \Omega \sin \Omega t \Rightarrow N_y = m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2m [\Omega V_0 \cos \Omega t + \sqrt{2}R \Omega^2 \sin \Omega t]$

de (2.3): $N_z = mg$

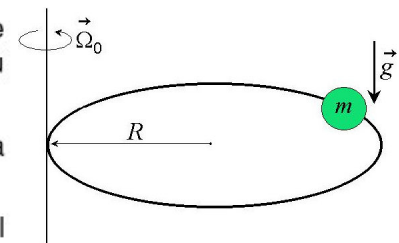
Finalmente:
$$\vec{N} = m \left[\Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\Omega V_0 \cos \Omega t + 2\sqrt{2}R \Omega^2 \sin \Omega t \right] \hat{j} + mg \hat{k}$$

Problema N°3 Control N°3 2004-1

Un aro horizontal, de radio R , gira con velocidad angular constante Ω_0 en torno a un eje vertical que pasa por el aro (a distancia R de su centro). Una argolla de masa m puede deslizar sin roce en el aro.

Inicialmente la argolla está en el punto opuesto al eje y se le da una velocidad V_0 relativa al aro, en la misma dirección de giro del aro.

Determine la velocidad mínima V_0 para que la argolla llegue hasta el eje.



Solución:

En la figura, representada en el plano del movimiento (horizontal), se define:

- un sistema fijo de coordenadas polares con origen en el eje vertical de rotación que se indica en el enunciado, de variables (r, θ) .
- un sistema móvil de coordenadas polares con origen en el centro del aro, de variables (ρ, ϕ) .

En este problema también interesa analizar el movimiento de la partícula dentro del sistema no inercial recién definido, donde la ecuación general de este movimiento es:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m \left[\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) \right] \quad (1)$$

evaluando los términos de la ecuación (1) para este caso:

$$\vec{a}^{rel} = -R\dot{\phi}^2 \hat{\rho} + R\ddot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{F} = -N_{\rho} \hat{\rho} + N_z \hat{k} - mg \hat{k}$$

$$\vec{a}_0 = -\Omega_0^2 R \hat{r} = -\Omega_0^2 R \cos \phi \hat{\rho} + \Omega_0^2 R \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

$$\vec{r}^{rel} = R \hat{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} = \Omega_0 \hat{k} \times R\dot{\phi} \hat{\phi} = -\Omega_0 R\dot{\phi} \hat{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) = \Omega_0 \hat{k} \times (\Omega_0 \hat{k} \times R \hat{\rho}) = \Omega_0 \hat{k} \times \Omega_0 R \hat{\phi} = -\Omega_0^2 R \hat{\rho}$$

Reemplazando estos términos en (1):

$$m(-R\dot{\phi}^2 \hat{\rho} + R\ddot{\phi} \hat{\phi}) = -N_{\rho} \hat{\rho} + N_z \hat{k} - mg \hat{k} - m[-\Omega_0^2 R \cos \phi \hat{\rho} + \Omega_0^2 R \sin \phi \hat{\phi} - 2\Omega_0 R\dot{\phi} \hat{\rho} - \Omega_0^2 R \hat{\rho}]$$

entonces, las ecuaciones escalares en el sistema no inercial son:

$$\text{según } \hat{k}: \quad 0 = N_z - mg \quad (2.1)$$

$$\text{según } \hat{\rho}: \quad -m R \dot{\phi}^2 = -N_{\rho} + m \Omega_0^2 R \cos \phi + m 2\Omega_0 R \dot{\phi} + m \Omega_0^2 R \quad (2.2)$$

$$\text{según } \hat{\phi}: \quad m R \ddot{\phi} = -m \Omega_0^2 R \sin \phi \quad (2.3)$$

$$\text{de la ecuación (2.3): } \ddot{\phi} = -\Omega_0^2 \sin \phi = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \Rightarrow \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2] = \Omega_0^2 [\cos \phi - \cos \phi_0]$$

$$\text{condiciones iniciales: } \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \dot{\phi}(0) = \frac{V_0}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2(\phi) = \frac{V_0^2}{R^2} + 2\Omega_0^2 [\cos \phi - 1] \quad (3)$$

V_{0m} es el valor mínimo de V_0 para la partícula llegue justo al eje $\Leftrightarrow$ con $V_0 = V_{0m}$: $\dot{\phi}(\phi = \pi) = 0$

Imponiendo esta condición de borde en (3):

$$\frac{V_{0m}^2}{R^2} + 2\Omega_0^2 [-1 - 1] = 0 \Rightarrow V_{0m}^2 = 4\Omega_0^2 R^2 \Rightarrow \boxed{V_{0m} = 2\Omega_0 R}$$

