Complemento Clase del 05-05-2011

(Leyes de Kepler)

Las tres leyes de Kepler son:

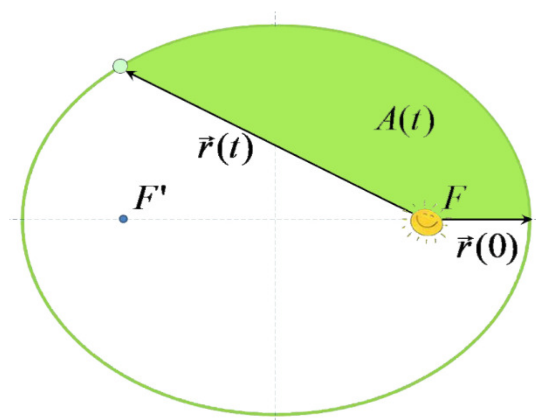
1º Todos los planetas del sistema solar describen trayectorias elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

2º En su movimiento, los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.

3º Para todos los planetas se cumple que el cuadrado del periodo de su órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse que tiene por trayectoria.

Primera Ley:
La primera ley se demostró en cátedra al deducir la ecuación de la trayectoria de un cuerpo sometido a la fuerza de gravitación universal de Newton. En este caso las trayectorias posibles son cónicas, y cuando se trata de órbitas acotadas resultan ser elipses.

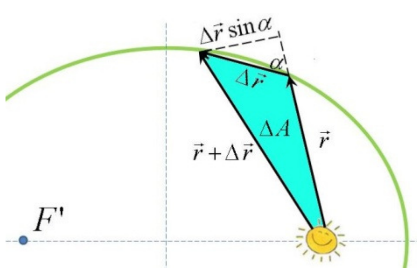
Segunda Ley:
Para la segunda ley, tomamos nuestro sistema de referencia de coordenadas polares, ubicando su origen en el foco donde se encuentra el Sol. Desde allí el vector posición sigue al planeta en su órbita elíptica "barriendo" parte del área de la elipse como se ve en la figura.



Si llamamos $A(t)$ al área barrida desde la posición inicial $\vec{r}(0)$ (arbitrariamente escogida por nosotros como se observa en la figura) hasta la posición $\vec{r}(t)$, lo que dice la segunda ley de Kepler es que la variación temporal del área barrida por el radio vector es constante:

$$\frac{dA}{dt} = \text{ cte } (\textbf{velocidad areolar}).$$

Analicemos el diferencial de área dA que barre el radio vector desde $\vec{r}(t)$desde hasta $\vec{r}(t+dt)$.



El valor ΔA es el área del triángulo formado por los tres vectores de la figura, donde α es el ángulo que forma $\vec{r}$ con $\Delta\vec{r}$.

Entonces: $\Delta A = \frac{1}{2}\|\vec{r}\|\|\Delta\vec{r}\|\sin\alpha = \frac{1}{2}\|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\| \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right\|$

Tomando $\lim_{\Delta t\to 0}$: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \frac{1}{2m}\|\vec{\ell}_o\|$

Sabemos que $\vec{\ell}_o$ es constante, entonces $\frac{dA}{dt}$ también es constante.

Esto es válido para el área barrida por el vector posición (referido al centro de fuerzas) de una partícula cuyo movimiento está sometido a cualquier fuerza central.

Tercera Ley:

La demostración de la tercera ley hace uso de la segunda ley que acabamos de demostrar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell_o}{2\,m}$$

Integrando sobre toda el área:

$$\int_0^{A_{Total}} dA = \frac{\ell_o}{2\,m}\int_0^T dt$$

El área total corresponde al área de la elipse cuyo valor es $\pi\,a\,b$ donde a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente de la elipse. El tiempo T es el tiempo que tarda el radio vector en barrer toda el área de la elipse, es decir, es el tiempo que le toma en completar una vuelta a la elipse que por definición es el periodo.

La ecuación anterior queda: $\pi\,a\,b = \frac{\ell_o}{2\,m}\,T \Rightarrow T = \frac{2\pi\,a\,b\,m}{\ell_o} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{\ell_o^2}$

De la geometría de la elipse se sabe que: $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1-e^2)$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{a(1-e^2)m^2}{\ell_o^2}$$

Por otra parte, la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares se puede escribir de las siguientes dos formas para el caso de una elipse:

$$r(\phi) = \frac{\frac{\ell_o^2}{GMm^2}}{1+e\ \cos\phi} \quad ; r(\phi) = R_{mín}\,\frac{1+e}{1+e\cos\phi} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

De ellas se desprende que: $\frac{1}{GM} = \frac{a(1-e^2)\,m^2}{\ell_o^2}$

Reemplazando en la expresión para el período, obtenemos: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$

El cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor y la constante de proporcionalidad depende de la masa del cuerpo que está en el foco, (en nuestro caso, el Sol).