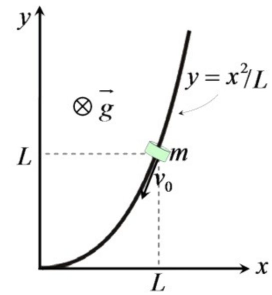
CONTROL N° 2

PROBLEMA 1

Un anillo de masa m se mueve a lo largo de un alambre horizontal con forma de parábola descrita por $y = x^2/L$, donde L es una longitud conocida. En el instante inicial el anillo se encuentra en el punto (L, L), moviéndose hacia el origen con rapidez v_0. Además de la fuerza que el alambre ejerce al anillo, actúan las siguientes dos fuerzas sobre él:
$\vec{F}_1 = -Ar^2\,\hat{r}$ (atracción radial) y $\vec{F}_2 = B(y^2\,\hat{\imath} - x^2\,\hat{\jmath})$, donde A y B son constantes positivas conocidas.

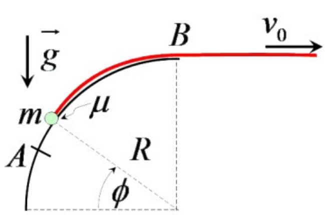


a) Señale si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son o no conservativas. Justifique claramente su respuesta. [2 ptos.]

b) Determine la rapidez con que el anillo llega al origen. [4 ptos.]

PROBLEMA 2

Una partícula de masa m se encuentra sobre el manto de un cilindro de eje horizontal de radio R como muestra la figura. Una cuerda ideal arrastra a la partícula con rapidez constante v_0 a partir de un punto A en que $\phi = 30°$. Entre la partícula y el cilindro existe un roce dinámico de coeficiente μ y además un roce viscoso lineal con el aire, de la forma $-c\vec{v}$. Se pide:



a) Determinar el mayor valor que puede tener v_0 tal que la partícula no se separe del cilindro en el tramo $A - B$ (donde B es el punto más alto del cilindro). [2 ptos.]

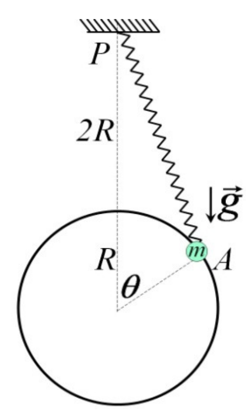
b) Suponiendo que la partícula no se separa del cilindro, determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula en su movimiento entre A y B. [4 ptos.]

   b1) Escriba el valor de los trabajos que efectúan individualmente las fuerzas: peso, roce dinámico y roce viscoso.

   b2) Calcule el trabajo efectuado por el motor en el ascenso del carro desde A a B. ¿Puede ser nulo este trabajo?. Explique su respuesta.

PROBLEMA 3

Un anillo A de masa m desliza por un aro de radio R. El anillo está ligado, mediante un resorte ideal de largo natural D y constante elástica k, a un punto fijo P ubicado a una altura $2R$ sobre el punto más alto del aro.



a) Determine el rango de valores para el largo natural del resorte tal que $\theta = 0°$ corresponda a un punto de equilibrio inestable para el anillo.

b) Si se cumple que $mg = kR$ y $D = 2R$ determine todos los puntos de equilibrio del anillo, indicando su tipo y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los equilibrios estables.

c) Si se cumplen las condiciones $mg = kR$ y $D = 2R$, y el anillo se encuentra en $\theta = 90°$, determine la mínima rapidez que se le debe impartir tal que en su movimiento dé por lo menos una vuelta completa al aro.

Solución Problema 1:

$\vec{F}_1 = -A\, r^2 \hat{r}$; $\vec{F}_2 = B(y^2\, \hat{\imath} - x^2\, \hat{\jmath})$

a) Sea $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \;\Rightarrow\; \vec{F}_1 = F_{1x}\hat{\imath} + F_{1y}\hat{\jmath}$. donde: $F_{1x} = F\frac{x}{r} = -Ax\, r$; $F_{1y} = F\frac{y}{r} = -Ay\, r$

$\frac{\partial F_{1x}}{\partial y} = -Ax\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-Ax\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial F_{1y}}{\partial x} = -Ay\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-Ay\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} \;=>\; \vec{\nabla}\times\vec{F}_1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_1$ es conservativa

Alternativamente, se puede llegar a esta conclusión identificando una función potencial $U(r)$ tal que $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}U$. Encontramos que $U(r) = \frac{1}{3}A\, r^3$ cumple esta condición. Por lo tanto $\vec{F}_1$ es conservativa.

Para $\vec{F}_2$ evaluamos $\vec{\nabla}\times\vec{F}_2$: $\frac{\partial F_{2x}}{\partial y} = B\, 2y$; $\frac{\partial F_{2y}}{\partial x} = B\, 2x \Rightarrow \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} \neq \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_2$ es no conservativa

b) $\Delta K_{a\to b} = W_{a\to b}^{\vec{F}neta}$

Las fuerzas sobre el anillo son: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{N}$, donde $\vec{N}$ no realiza trabajo por ser $\perp$ a $\overrightarrow{dr}$

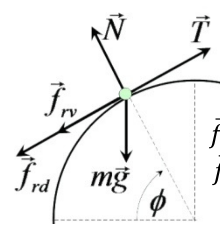
$W_{a\to b}^{\vec{F}_1} = -\Delta U_{a\to b}^{\vec{F}_1} = -(U_b^{\vec{F}_1} - U_a^{\vec{F}_1}) = -A\left[0 - \frac{(L\sqrt{2})^3}{3}\right] = \frac{AL^3\sqrt{8}}{3}$

$W_{a\to b}^{\vec{F}_2} = \int_a^b \vec{F}_2\cdot\overrightarrow{dr} = \int_a^b B(y^2\,\hat{\imath} - x^2\,\hat{\jmath})\cdot(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) = B\int_a^b y^2 dx - x^2 dy$

Pero $y = \frac{x^2}{L} \Rightarrow y^2 = \frac{x^4}{L^2}$ y $dy = \frac{2x}{L}dx \Rightarrow W_{a\to b}^{\vec{F}_2} = B\int_{x=L}^{x=0}\left[\frac{x^4}{L^2} - x^2\frac{2x}{L}\right]dx = B\left[-\frac{L^5}{5L^2} + \frac{2L^4}{4L}\right] = \frac{3BL^3}{10}$

Evaluamos $\Delta K_{a\to b} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{a\to b}^{\vec{F}_1} + W_{a\to b}^{\vec{F}_2} = \frac{AL^3\sqrt{8}}{3} + \frac{3BL^3}{10} = L^3\frac{10A\sqrt{8}+9B}{30} \;\Rightarrow\; v_f^2 = v_0^2 + \frac{L^3(10A\sqrt{8}+9B)}{15m}$

Solución Problema 2:



Si la partícula se mueve con rapidez v_0 en contacto con el cilindro, las ecuaciones escalares del movimiento se pueden escribir en la forma:

$F_n = mg\, \sin\phi - N = m\, v_0^2/R$ (1)

$F_t = T - mg\cos\phi - \mu\, N - c\, v_0 = 0$ (2)

De (1) $N = mg\, \sin\phi - m\, v_0^2/R$

a) Condición de contacto con el cilindro: $N > 0 \Rightarrow mg\, \sin\phi > m\, v_0^2/R => v_0^2 < Rg\, \sin\phi$, $\forall$ el movimiento. Dado que $(\sin\phi)_{mín} = \sin\phi_A = 1/2 \Rightarrow$ con $v_0^2 < Rg\,/2$ la partícula no se separa del cilindro en todo el tramo $A - B$.

b) b1) $W_{A\to B}^{m\vec{g}} = -\Delta U_{A\to B}^{m\vec{g}} = -(mgR\, \sin\,\pi/2\, - mgR\, \sin\,\pi/6\,) = -\frac{mg}{2} < 0$

$W_{A\to B}^{\vec{f}_{rd}} = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(-\mu\, N\,\hat{t}\cdot R\, d\phi\,\hat{t}) = -\mu\, m\int_{\pi/6}^{\pi/2}(g\, \sin\phi - v_0^2/R)\, R\, d\phi = -\mu\, m\left[+\frac{gR\sqrt{3}}{2} - \frac{v_0^2\pi}{3}\right] < 0$

$W_{A\to B}^{\vec{f}_{rv}} = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(-c\, v_0\hat{t}\cdot R\, d\phi\,\hat{t}) = -\frac{c\, v_0\, R\pi}{3} < 0$

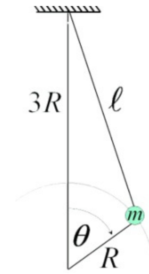
b2) Sabemos que $\Delta K_{A\to B} = W_{A\to B}^{\vec{F}neta}$, pero $v = \text{cte} \Rightarrow \Delta K_{A\to B} = W_{A\to B}^{\vec{F}neta} = 0$

Las fuerzas que actúan están en el DCL, siendo la tensión la que transmite la fuerza del motor. Entonces:
$W_{A\to B}^{\vec{F}neta} = 0 = W_{A\to B}^{\vec{T}} + W_{A\to B}^{\vec{N}} + W_{A\to B}^{m\vec{g}} + W_{A\to B}^{\vec{f}_{rd}} + W_{A\to B}^{\vec{f}_{rv}}$, donde $W_{A\to B}^{\vec{N}} = 0$, ya que $\vec{N} \perp$ a $\overrightarrow{dr}$

Por lo tanto, el trabajo del motor es: $W_{A\to B}^{\vec{T}} = \frac{mg}{2} + \mu\, m\left[\frac{gR\sqrt{3}}{2} - \frac{v_0^2\pi}{3}\right] + \frac{c\, v_0\, R\pi}{3}$

Este trabajo no puede ser nulo. Debe ser positivo porque compensa el trabajo realizado por tres fuerzas, donde cada una de ellas realiza un trabajo negativo en este tramo.

Solución Problema 3:



De la geometría: $\ell^2 = (3R)^2 - 6R^2\cos\theta + R^2 \Rightarrow \ell = R\sqrt{10 - 6\cos\theta}$
Entonces el potencial elástico se puede escribir como: $U^e(\theta) = \frac{1}{2}k\,R^2\,(\sqrt{10-6\cos\theta} - D/R)^2$
El potencial gravitatorio $U^{mg}(\theta) = mg\,R\,\cos\theta$ (con la referencia: $U^{mg} = 0$ en $\theta = \pi/2$)

Por lo tanto: $U(\theta) = \frac{1}{2}k\,R^2\,(\sqrt{10-6\cos\theta} - D/R)^2 + mg\,R\,\cos\theta$

$$\frac{dU}{d\theta} = k\,R^2\,\frac{(\sqrt{10-6\cos\theta} - D/R)}{2\sqrt{10-6\cos\theta}}\,(6\sin\theta) - mg\,R\,\sin\theta = R\sin\theta\left[3kR - \frac{3kD}{\sqrt{10-6\cos\theta}} - mg\right]$$

a) Condiciones para el equilibrio inestable en $\theta = 0$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = R\cos\theta\left[3kR - \frac{3kD}{\sqrt{10-6\cos\theta}} - mg\right] + R\sin^2\theta\,(9kD)(10-6\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$$

Equilibrio inestable en $\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)_{\theta_e=0} < 0 \;\Rightarrow\; R\left[3kR - \frac{3kD}{\sqrt{10-6}} - mg\right] < 0 \;\Rightarrow\; D > 2R - \frac{2mg}{3k}$

b) Ahora $mg = kR$ y $D = 2R \;\Rightarrow\; \frac{dU}{d\theta} = R\sin\theta\;\left[3kR - \frac{6kR}{\sqrt{10-6\cos\theta}} - kR\right] = 2kR^2\sin\theta\;\left[1 - \frac{3}{\sqrt{10-6\cos\theta}}\right]$

$$\left(\frac{dU}{d\theta}\right)_{\theta_e} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta_e = 0 \Rightarrow \theta_{e1} = 0\,;\; \theta_{e2} = \pi \text{ (para } \theta_{e1} \text{ el equilibrio es inestable, ya que } D > 2R) \\ \sqrt{10-6\cos\theta} = 3 \;\Rightarrow\; 6\cos\theta = 10 - 9 \;\Rightarrow\; \cos\theta_e = 1/6 \;\Rightarrow\; \theta_{e3}\,,\,\theta_{e4} = \pm\sin^{-1}\sqrt{35}/6 \end{cases}$$

Evaluemos la segunda derivada de U para todos los puntos de equilibrio:

$(d^2U/\,d\theta^2)_{\theta_{e1}} = 2kR^2(1 - 3/\sqrt{4}) = -kR^2 < 0$ => Punto de equilibrio inestable.
$(d^2U/\,d\theta^2)_{\theta_{e2}} = -2kR^2\left(1 - \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = -(1/2)kR^2 < 0$ => Punto de equilibrio inestable.
$(d^2U/\,d\theta^2)_{\theta_{e3},\theta_{e4}} = \left(2kR^2\cos\theta\left[1 - \frac{3}{\sqrt{10-6\cos\theta}}\right] + 18kR^2\sin^2\theta\,(10-6\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}\right)_{\theta_{e3},\theta_{e4}} = kR^2\frac{35}{54} > 0$
=>θ_{e3}, θ_{e4} son puntos de equilibrio estables.

La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos θ_{e3} y θ_{e4}, está dada por: $\omega^2 = \frac{1}{mR^2}\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)_{\theta_e} = \frac{35k}{54m}$

c) Rapidez mínima en $\theta = \pi/2$ tal que dé una vuelta completa:
$EMT = \frac{1}{2}m\,v_0^2 + U(\theta = \pi/2) = K_{mín} + U_{MÁX} > U_{MÁX}$
$\frac{1}{2}m\,v_0^2 > U(\theta = 0) - U(\theta = \pi/2)$
Con $mg = kR$ y $D = 2R$: $U(\theta) = kR^2[7 - 2\cos\theta - 2\sqrt{10-6\cos\theta}\,] \Rightarrow U(0) = kR^2$; $U(\pi/2) = k\,R^2[7 - 2\sqrt{10}]$
$\frac{1}{2}m\,v_0^2 > k\,R^2\,[1 - 7 + 2\sqrt{10}\,] \Rightarrow \quad v_0^2 > 4\,R^2\frac{k}{m}\,[\sqrt{10} - 3\,]$

En efecto, para que el anillo dé una vuelta completa, la energía que se le entrega en su posición inicial debe ser tal que le permita escapar del pozo de potencial.

En la figura vemos que, con un nivel de energía E_1, el anillo queda atrapado en el pozo de potencial, oscilando entre algún $\theta_{MÁX}$ y algún $\theta_{mín}$ que dependen de E_1. Sin embargo, con un nivel de energía E_2 el anillo logra escapar desde cualquier posición. La condición es que llegue a la posición de máxima energía potencial con un mínimo de energía cinética mayor que cero.