Ejercicio 4

FI2001 - Mecánica
Prof. Patricia Sotomayor
Semestre Otoño 2011
Auxiliares: Camilo Soto & Kim Hauser
Tiempo de resolución: 45 min.

Considere una partícula de masa m que es soltada en el punto más alto de una rampa curva (ver figura). Al llegar al final de la rampa (punto P), la partícula comienza a deslizar por un plano inclinado un ángulo α. Al comienzo, desliza por una zona rugosa de largo D, cuyo coeficiente de roce cinético varía según la expresión:

$$\mu_c = ax$$

donde x es la distancia plano abajo, donde $x = 0$ en el punto P y $x = D$ al final de la zona rugosa.
Cuando la partícula abandona la zona rugosa, se adhiere al extremo de un resorte de constante elástica k y largo natural l_o, y lo comienza a comprimir. Inicialmente el resorte se encuentra en su largo natural.

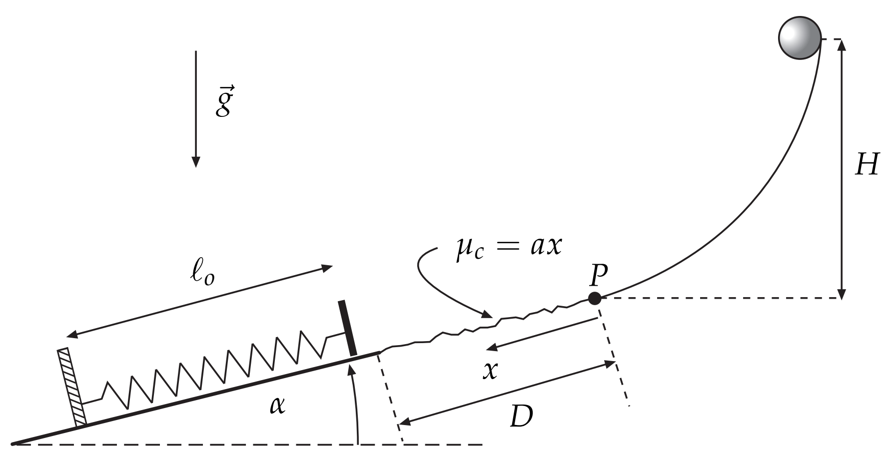

Fig. ej. 4

Determine:

(a) La rapidez v_P de la partícula en el punto P.

(b) El trabajo que realiza la fuerza de roce cinético entre $x = 0$ y $x = D$.

(c) La rapidez v_D de la partícula una vez que abandona la zona rugosa. Diga cuál es la condición para que esta rapidez sea no nula.

(d) Escriba una expresión para la máxima compresión δ_{max} del resorte, esto es, la compresión del resorte una vez que la partícula se detiene.

Esta es sólo UNA posible solución del problema. Pueden haber otras.

Solución Ej. 4

a) $E_i = 0 \quad (K = 0,\ U_g = 0)$

se impone así en esta solución pero se puede definir $U_g = 0$ en otra altura.

$$E_P = \frac{1}{2} m v_P^2 + U_{gP} \qquad U_{gP} = -mgH \quad y \quad E_P = E_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_P^2 = mgH$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_P = \sqrt{2gH}}$$

b)

$$\vec{F}_{\mu_c} = -\mu_c |\vec{N}|\,\hat{\imath}\,,$$ donde es fácil ver que $$|\vec{N}| = mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mu_c} = -\mu_c mg \cos\alpha\,\hat{\imath}$$

Además: $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\mu_c} \cdot d\vec{r} = -\mu_c\, mg\cos\alpha\, dx$

Pero $\mu_c = ax \quad \Rightarrow \quad W_{\mu_c} = \int_0^D -ax \cdot mg\cos\alpha\, dx = -\frac{aD^2}{2} mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{\mu_c} = -\frac{aD^2}{2} mg\cos\alpha}$$

c) Mantendremos la referencia de $U_g=0$ en lo alto de la rampa curva, como en la parte a).

Dado que $\vec{F}_{\mu c}$ es la única fuerza no conservativa que realiza trabajo:

$$W_{\mu c} = \Delta E = E(x=D) - E(x=0)$$

y $E(x=0) = E_P = E_i = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{E(x=D) = W_{\mu c}} \quad (*)$$

Pero $E(x=D) = K(x=D) + U_g(x=D)$

$K(x=D) = \frac{1}{2} m v_D^2$ y $U_g(x=D) = -mgH - mgD\operatorname{sen}\alpha$

$$\Rightarrow \quad E(x=D) = \frac{1}{2} m v_D^2 - mg(H + D\operatorname{sen}\alpha)$$

$$(*) \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m} v_D^2 - \cancel{m}g(H + D\operatorname{sen}\alpha) = -\frac{aD^2}{2}\cancel{m}g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_D = \sqrt{2g\left(H + D\operatorname{sen}\alpha - \frac{aD^2}{2}\cos\alpha\right)}}$$

$$v_D \geq 0 \Rightarrow \quad \boxed{H + D\operatorname{sen}\alpha > \frac{aD^2}{2}\cos\alpha}$$

d) La energía potencial del resorte se escribe como sigue:

$$U_{res}(\delta) = \frac{1}{2}k\delta^2 \text{, donde } \delta \text{ es la compresión del resorte.}$$

Luego, en $x = D$, $\delta = 0$, y $E(x=D) = -\frac{aD^2}{2}mg\cos\alpha$.

Cuando el resorte detiene a la partícula:

$$K = 0, \quad y \quad E_{final} = U_{res}(\delta_{max}) + U_g(\delta_{max})$$

$$U_g(\delta_{max}) = -mg\left(H + D\,\text{sen}\,\alpha + \delta_{max}\,\text{sen}\,\alpha\right)$$

Y como en el último tramo sólo hay fuerzas conservativas:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ [E(\delta_{max})]}}{E_{final}} = E(x=D) = -\frac{aD^2}{2}mg\cos\alpha$$

Así:

$$\frac{1}{2}k\delta_{max}^2 - mg\left(H + D\,\text{sen}\,\alpha + \delta_{max}\,\text{sen}\,\alpha\right) = -\frac{aD^2}{2}mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}k\delta_{max}^2 - mg\,\delta_{max}\,\text{sen}\,\alpha + mg\left(\frac{aD^2}{2}\cos\alpha - H - D\,\text{sen}\,\alpha\right) = 0}$$

Se pide dejar una expresión, lo cual se cumple acá. ■