Ejercicio 2

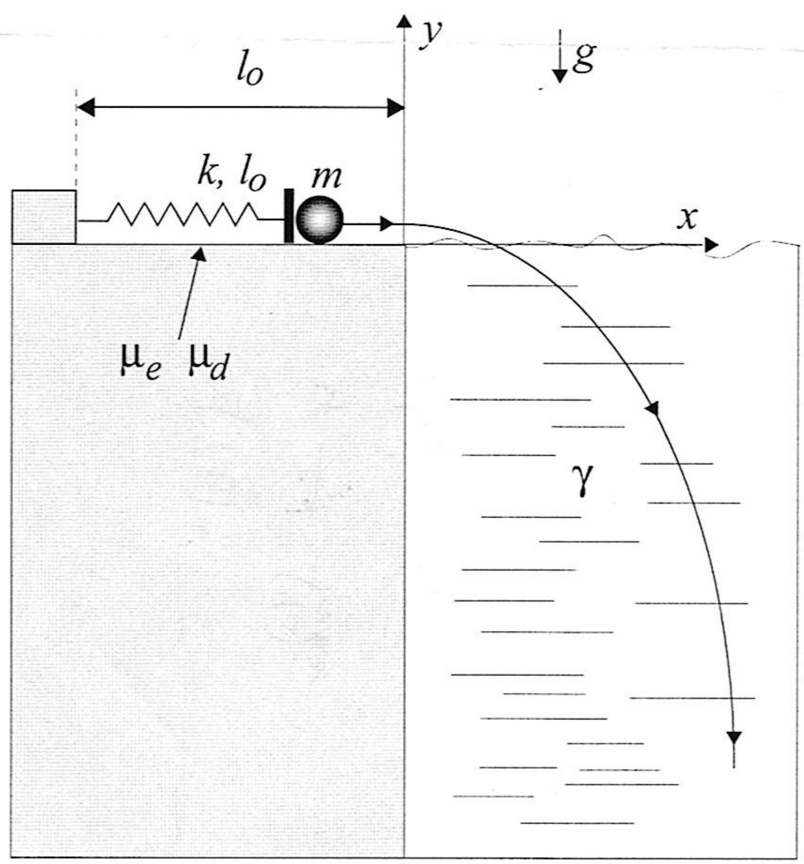
FI21A - Mecánica
Prof. N. Mujica
Profs. Auxs. Paulina Cecchi y Kim Hauser
Martes 23 de Mayo 2006
Duración: 1 hr

P1. Roce dinámico y roce viscoso lineal. Considere un sistema compuesto por un resorte y una masa que se encuentran al borde de una piscina muy profunda como se indica en la figura. El resorte es de largo natural l_o y constante elástica k. A éste se fija una pared móvil de masa despreciable. El sistema se prepara de modo que la partícula puntual de masa m se coloca junto a esta pared en su posición de compresión máxima, es decir en $x = -l_o$, según el sistema de coordenadas que se muestra en la figura, y se suelta desde el reposo. Se pide:

(a) Cuál es la condición que asegura que la masa m se moverá desde $x = -l_o$? (1pts)

(b) Encuentre el valor máximo de μ_d que permita a la masa llegar al borde de la piscina ($x = 0$) con velocidad no nula. Entregue el valor de esta velocidad no nula. (2pts)

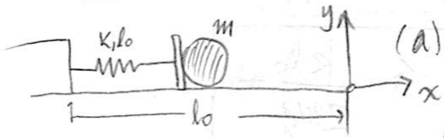
(c) Considere que la masa entra a la piscina inmediatamente cuando $x > 0$. Una vez que entra, la masa experimenta una fuerza de roce viscoso lineal, de constane γ. Suponga además que no hay fuerza de empuje (la masa es puntual). Determine entonces el alcance máximo que alcanzará la masa y su velocidad límite. (3pts)



P Ejercicio 2 – Otoño 2006. Prof. Nicolás Mujica

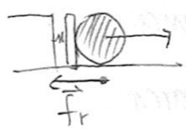
Roce dinámico y roce viscoso lineal.

Solución:



(a) Si posicionamos la masa en $x = -l_0$, entonces las fuerzas que actúan sobre ella son:

$\sum$ Fzas: $\vec{f}_r$; $\vec{N} = N\hat{j}$; $m\vec{g} = -mg\hat{j}$, $\vec{f}_{res} = -kx\hat{i}$



$\boxed{\vec{f}_{res} = kl_0\hat{i}}$ y $\boxed{N = mg}$

Como sabemos que $|\vec{f}_r| \leq \mu_e |\vec{N}| = \mu_e mg$, entonces es claro que la masa se moverá si es que:

$$\mu_e mg < kl_0 \Rightarrow \boxed{\mu_e < \frac{kl_0}{mg}}$$ es la condición para que la masa se mueva.

b) $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i}$ $\quad$ $\sum$ Fzas: $\vec{N} = mg\hat{j}$; $m\vec{g} = -mg\hat{j}$. $\vec{f}_{rd} = -\mu_d|\vec{N}|\hat{i}$
$\vec{f}_{res} = -kx\hat{i}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx - \mu_d \cdot mg \Leftrightarrow \ddot{x} = -\left(\frac{k}{m}x + \mu_d g\right)$$

Pero $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}$, luego:

$$d\dot{x} \cdot \dot{x} = -\frac{k}{m}x\,dx - \mu_d g\,dx \quad \Big/ \int_{\dot{x}_0 = 0}^{\dot{x}_f} , \int_{x=-l_0}^{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_f^2}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{l_0^2}{2} - \mu_d g l_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}_f^2 = \frac{k}{m} l_0^2 - 2\mu_d g l_0}$$

$\therefore$ para que $\dot{x}_f^2 > 0$

$$\boxed{\mu_d < \frac{k l_0}{2mg}}$$

c) A partir de $x=0$, deja de existir roce dinámico con el suelo y la fuerza del resorte también desaparece. Aparece, en cambio, roce viscoso lineal. Luego:

$\sum F_{zas}$: $m\vec{g} = -mg\hat{j}$ $\quad \vec{F}_{r.v.} = -\mu\vec{v}$

Ahora, $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$, $\quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$

Luego tenemos dos ecuaciones escalares de movimiento:

$\hat{i})$ $m\ddot{x} = -\mu\dot{x}$

$\hat{j})$ $m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg$

Alcance máximo:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{-\mu\dot{x}}{m}$$

$$\Rightarrow \quad d\dot{x} = \frac{-\mu}{m} dx \Big/ \int_{\dot{x}_f = \frac{k}{m} l_0^2 - 2\mu_d g l_0}^{\dot{x}=0}, \int_{x=0}^{x_{max}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{k}{m} l_0^2 + 2\mu_d g l_0}_{-\dot{x}_f} = -\frac{\gamma}{m} \cdot x_{max}$$

$$\therefore \boxed{x_{max} = \frac{m \dot{x}_f}{\gamma}}$$

Velocidad límite:

$$j) \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{\gamma}{m}\dot{y} - g \quad , \text{ pero } \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{y}}{g + \frac{\gamma}{m}\dot{y}} = -dt \quad \Big/ \int_{\dot{y}_0=0}^{\dot{y}} \; , \; \int_{t=0}^{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\gamma} \ln\left(g + \frac{\gamma}{m}\dot{y}\right)\Big|_0^{\dot{y}} = \frac{m}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma}{mg}\dot{y}\right) = -t$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\gamma}{mg}\dot{y} = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{mg}{\gamma}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right]$$

Evidentemente, la velocidad límite la obtenemos haciendo $t \to \infty$:

$$\therefore \boxed{\dot{y}_{lím} = -\frac{mg}{\gamma}}$$

/ k.h.v.